Всероссийская олимпиада по физике имени Дж. Кл. Максвелла

Заключительный этап
Теоретический тур

2023

Комплект задач подготовлен Центральной предметно-методической комиссией по физике Всероссийской олимпиады школьников

Авторы задач

7 класс

1. Заяц А., Сеитов А.
2. Евсеев А.
3. Евсеев А.
4. Киреев А.

8 класс

1. Заяц А.
2. Евсеев А.
3. Киреев А.
4. Рубцов Д.

Общая редакция — Слободянин В., Евсеев А., Заяц. А., Киреев А., Сеитов А.

Иллюстрации — Заяц А., Клепиков М.

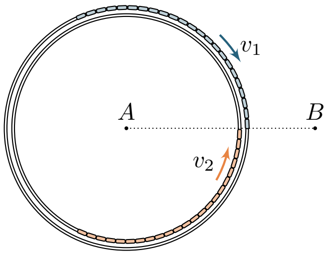
Вёрстка — Васенин Е.

7 класс

Задача 7.1 Периодическое движение

Теория. Периодическое движение — это движение, которое повторяется через равные интервалы времени. Минимальный интервал времени, в течение которого движение повторяется, называется периодом. Например, период секундной стрелки часов равен одной минуте, период минутной стрелки — это один час, период часовой стрелки — двенадцать часов.

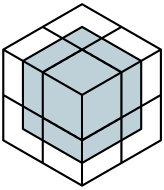
Задача. По кольцевой двухпутной железной дороге ездят без остановок два поезда. Оба пути имеют длину $L = 1$ км (отличиями в их длине можно пренебречь) и находятся на одном уровне. Первый поезд длиной $l_1 = 300$ м движется со скоростью $v_1 = 10$ м/с по часовой стрелке, второй поезд длиной $l_2 = 320$ м движется со скоростью $v_2 = 8$ м/с против часовой стрелки. В центре кольца стоит наблюдатель A. Наблюдатель B стоит за кругом, ограниченным железной дорогой так, что передние края обоих поездов пересекают отрезок AB одновременно (см. рис.). Наблюдатели не видят друг друга, только когда между ними находится хотя бы один поезд.



1. За какое время τ поезда проезжают мимо друг друга?
2. Чему равны периоды движения T_1 и T_2 первого и второго поезда соответственно?
3. Найдите период движения системы T, то есть минимальное время, через которое повторится ситуация, изображённая на рисунке.
4. В течение какой части α периода движения T наблюдатели видят друг друга?

Задача 7.2 7+1

У теоретика Бага было восемь одинаковых кубиков с длиной ребра $2a$: семь сделаны из материала плотностью ρ_x, и один — из материала плотностью ρ_y ($\rho_y < \rho_x$). Баг склеил из них большой куб с ребром $4a$ и задал своему ученику задачу определить плотности всех кубиков с ребром $3a$, которые можно вырезать из склеенного куба так, чтобы они имели с ним одну общую вершину (пример вырезания такого кубика показан на рисунке серым цветом). Ученик, решая задачу, получил несколько ответов, которые записал в виде таблицы:



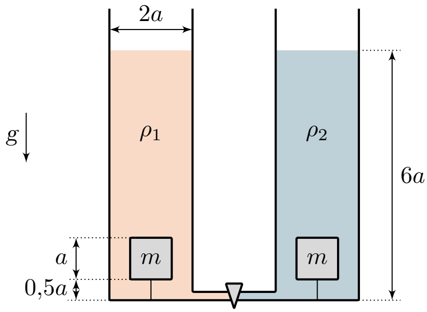
ρ_1, г/см^3	ρ_2, г/см^3	ρ_3, г/см^3	ρ_4, г/см^3
2,40	2,50	2,65	2,60
ρ_5, г/см^3	ρ_6, г/см^3	ρ_7, г/см^3	ρ_8, г/см^3
2,50	2,60	2,50	2,60

Проверив таблицу, Баг сказал, что все значения в ней, кроме одного, вычислены верно.

1. Определите какое из значений вычислено неверно и найдите это значение.
2. Определите плотности ρ_x и ρ_y.

Задача 7.3 Сообщающиеся кубики

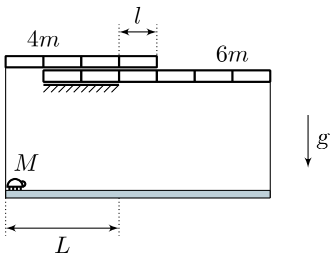
Два одинаковых открытых сосуда квадратного сечения со стороной $2a$ с вертикальными стенками соединены в нижней части тонкой горизонтальной трубкой. На трубке установлен кран. Вначале кран закрыт, левый сосуд заполнен до уровня $6a$ жидкостью неизвестной плотности ρ_1, а правый — до такого же уровня жидкостью неизвестной плотности ρ_2. Ко дну каждого из сосудов прикреплены на лёгких нитях длины $0{,}5a$ одинаковые кубики с длиной ребра a, причём сила натяжения левой нити равна $3T$, а правой — T.
Кран открывают, и система приходит в равновесие. При этом жидкости не смешиваются и из сосудов не вытекают. В состоянии равновесия сила натяжения правой нити становится равной $2T$.



Определите плотности жидкостей ρ_1, ρ_2, а также массу кубика m, выразив их через известные величины: g, T и a.

Задача 7.4 Жук на стержне

На рисунке изображена система, состоящая из двух однородных балок с массами $4m$ и $6m$, разделённых штрихами на равные части, лёгкого стержня длиной $7l$, подвешенного к балкам на лёгких нитях, и небольшого жука, находящегося у левого края стержня. Система расположена на неподвижной горизонтальной опоре длиной $2l$. Нити вертикальны, балки и стержень горизонтальны.

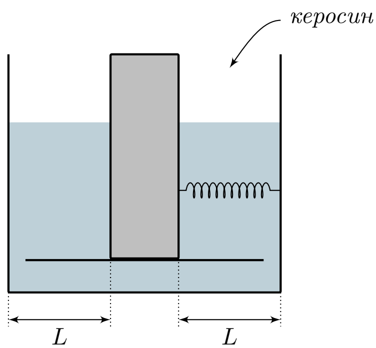


1. При каких значениях массы M жука такое равновесие возможно?
2. Жук массой $M = M_1$ начинает медленно переползать в направлении правого края стержня. На какое расстояние L жук удалится от левого края стержня в момент, когда система выйдет из положения равновесия? Определите максимально возможное значение этого расстояния $L_{\max}$. При каком отношении масс $\alpha = M_1/m$ оно достигается?

8 класс

Задача 8.1 Переменное сечение

Вблизи дна сосуда прямоугольного сечения, заполненного водой, имеется плоская, неподвижно закреплённая горизонтальная «полка». Слева, справа и под «полкой» есть свободное пространство для перетекания воды. На «полке» стоит тяжёлый прямоугольный поршень, присоединённый лёгкой горизонтальной пружиной к правой стенке (см. рис.). В начальном положении поршень расположен на расстоянии L от обеих стенок, а пружина не растянута. Когда в пространство между правой стенкой и поршнем налили керосин массой m, поршень сдвинулся на $L/3$ влево.

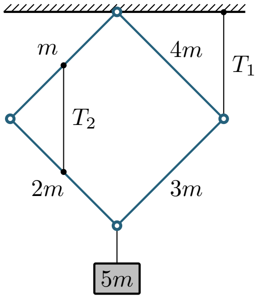


1. Какую массу m_1 керосина надо было налить, чтобы поршень сдвинулся на $L/2$ относительно своего начального положения?
2. На какое расстояние l сдвинулся бы поршень относительно начального положения, если бы масса налитого керосина была равна $3m$?

Между поршнем и «полкой», а также между поршнем, передней и задней стенками сосуда жидкости не протекают. Керосин под «полку» и через верхний край поршня не перетекает, а жидкости из сосуда не выливаются. Стенки сосуда вертикальны. Трения в системе нет. Объёмом пружины пренебречь.

Задача 8.2 Ромбическое равновесие

Четыре тонких однородных стержня постоянного сечения, имеющих разные массы m, $2m$, $3m$ и $4m$, но равные длины, соединили шарнирно и получили конструкцию, представленную на рисунке (массы соответствующих стержней указаны рядом с ними). К нижней части конструкции подвесили груз массой $5m$. Двумя нитями соединили середины левых стержней между собой, а также правый угол конструкции с потолком. Конструкция находится в равновесии, нити вертикальны.

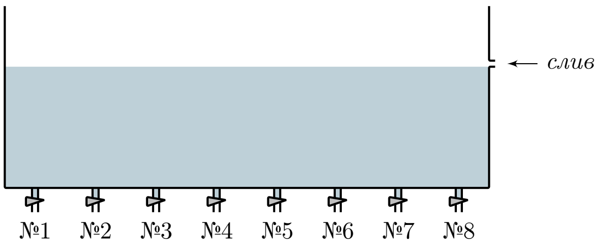


1. Определите силы натяжения правой и левой нитей T_1 и T_2 соответственно.
2. С какой силой F потолок действует на конструкцию в точке крепления верхнего шарнира?

Трение в системе отсутствует. Массой шарниров и нитей можно пренебречь.

Задача 8.3 Оптимальная температура

Экспериментатор Глюк соорудил в дачном домике для своих рыбок проточный аквариум. Для заполнения аквариума он может использовать восемь кранов, которые имеют номера — от 1 до 8. На определённом уровне в стенке аквариума оборудован слив лишней воды (см. рис.). Каждый открытый кран даёт одинаковый объём воды в единицу времени, причём вода из k-го крана имеет температуру $T_k = k \cdot 5\,^\circ\text{C}$. Оказалось, что если открыть только кран №2, то в аквариуме установится температура $t_2 = 15\,^\circ\text{C}$. Если открыть только кран №8, то установится температура $t_8 = 35\,^\circ\text{C}$.



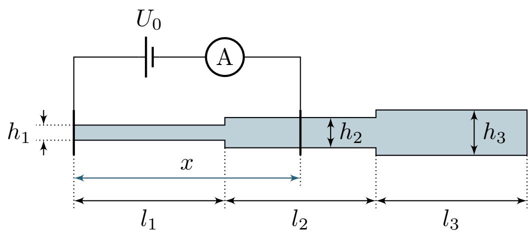
1. Определите температуру t_0 в дачном домике.
2. Какая температура t установится в аквариуме, если открыть сразу все краны?

3. Какие три крана нужно открыть при закрытых оставшихся, чтобы в установившемся режиме получить температуру воды, наиболее близкую к оптимальной $t_{оп} = 29\,°C$? Рассмотрите все возможные варианты. Ответ обоснуйте.
4. Как изменится ответ п. 3, если температуру воздуха в домике понизить на $\Delta t = 6\,°C$?

Мощность теплоотдачи от воды в аквариуме в окружающую среду прямо пропорциональна разности температур воды и окружающей среды. Считайте, что вода в аквариуме быстро перемешивается, а отверстие слива достаточно широкое.

Задача 8.4 Измерение малых сопротивлений

Экспериментатор Глюк исследовал проводник необычной формы — кусок нихромовой ленты постоянной толщины d, из которого вырезана фигура, изображённая на рисунке. Для этого он взял соединённые последовательно амперметр и идеальную батарейку с напряжением $U_0 = 1{,}5$ В. Один контакт получившейся системы он подключил к левому краю фигуры, второй контакт — на расстоянии x от первого контакта и стал снимать зависимость показаний амперметра I от x, занося результаты измерений в таблицу.



x, см	20	60	100	140	180	220	260
I, мА	818	455	315	241	204	182	167
x, см	300	340	380	420	460	500	
I, мА	150	138	130	124	119	114	

Со временем Глюк забыл все размеры фигуры, кроме $h_3 = 8$ мм. Определите значения l_1, l_2, l_3, h_1, h_2 и d, если известно, что последнее измерение экспериментатор проводил, подключив второй контакт к правому краю фигуры ($x_{\max} = l_1 + l_2 + l_3$). Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м. При решении задачи можно считать, что $d \ll l_j$, $h_i \ll l_j$ (для любых i и j). Погрешности значений искомых величин оценивать не требуется.

7 класс. Возможные решения

Задача 7.1 Периодическое движение

1. Для нахождения времени прохождения поездов мимо друг друга рассмотрим скорость их сближения: $v = v_1 + v_2$.
Так как путь прохождения одного поезда мимо «покоящегося» другого равен сумме их длин, получаем, что время прохождения поездов мимо друг друга:

$$\tau = \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} = \frac{300\ \text{м} + 320\ \text{м}}{10\ \text{м/с} + 8\ \text{м/с}} \approx 34\ \text{с}.$$

2. Периоды движения первого и второго поездов равны соответственно:

$$T_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{1000\ \text{м}}{10\ \text{м/с}} = 100\ \text{с},$$
$$T_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{1000\ \text{м}}{8\ \text{м/с}} = 125\ \text{с}.$$

3. Период движения T системы, состоящей из двух поездов можно найти следующим образом. Для повторения начальной ситуации каждый поезд должен проехать целое количество кругов. Предположим, что первый поезд сделает N_1 кругов, а второй — N_2 кругов. Тогда

$$N_1 T_1 = N_2 T_2 \quad \Rightarrow \quad 100 N_1 = 125 N_2 \quad \Rightarrow \quad 4N_1 = 5N_2.$$

Наименьшие целые положительные числа, удовлетворяющие этому соотношению,

$$N_1 = 5, \quad N_2 = 4,$$

откуда следует, что период движения системы равен

$$T = 5T_1 = 4T_2 = 500\ \text{с}.$$

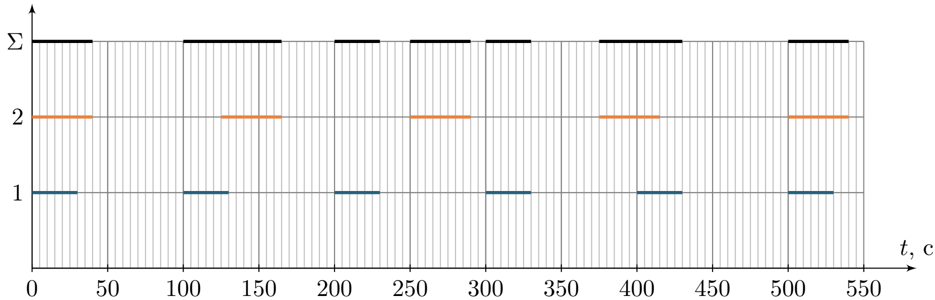
4. Ответ на последний вопрос можно найти, если показать на диаграмме интервалы времени, в течение которых поезда перекрывают видимость наблюдателям. Для построения диаграммы определим время перекрытия наблюдения для первого и второго поезда соответственно:

$$t_1 = \frac{l_1}{v_1} = \frac{300\ \text{м}}{10\ \text{м/с}} = 30\ \text{с},$$
$$t_2 = \frac{l_2}{v_2} = \frac{320\ \text{м}}{8\ \text{м/с}} = 40\ \text{с}.$$

Для описанной ситуации интервалы, в течение которых наблюдатели не видят друг друга, для каждого поезда показаны на диаграмме. Диаграмму Σ для определения части времени, когда нет видимости, легко найти путём объединения диаграмм первого и второго поезда (синий и красный цвет соответственно). Наблюдатели не видят друг друга

$$40\text{ с} + 65\text{ с} + 30\text{ с} + 40\text{ с} + 30\text{ с} + 55\text{ с} = 260\text{ с}$$

за один период, следовательно $\alpha = 1 - \frac{260}{500} = 0{,}48$.



Задача 7.2 7+1

Самый лёгкий из кубиков получится, если в нём будет целиком содержаться малый кубик плотностью ρ_y. Плотность такого кубика

$$\rho_{\min} = \frac{8\rho_y a^3 + 19\rho_x a^3}{27a^3} = \frac{8\rho_y + 19\rho_x}{27}.$$

Аналогично, самый тяжёлый получится, если в него войдёт только восьмая часть кубика плотностью ρ_y. Его плотность

$$\rho_{\max} = \frac{\rho_y a^3 + 26\rho_x a^3}{27a^3} = \frac{\rho_y + 26\rho_x}{27}.$$

Если в новый кубик целиком входит малый кубик, имеющий общую грань с лёгким (таких кубиков три), то его плотность

$$\rho_{\text{гр}} = \frac{4\rho_y a^3 + 23\rho_x a^3}{27a^3} = \frac{4\rho_y + 23\rho_x}{27}.$$

Если же в новый кубик целиком входит малый кубик, имеющий с лёгким только общее ребро (таких кубиков тоже 3), то его плотность

$$\rho_{\text{р}} = \frac{2\rho_y a^3 + 25\rho_x a^3}{27a^3} = \frac{2\rho_y + 25\rho_x}{27}.$$

В таблице есть две тройки одинаковых значений. И они, очевидно, посчитаны верно. Тогда

$$\frac{4\rho_y + 23\rho_x}{27} = 2{,}50\ \text{г/см}^3,$$
$$\frac{2\rho_y + 25\rho_x}{27} = 2{,}60\ \text{г/см}^3.$$

Откуда $\rho_x = 2{,}70$ г/см^3, а $\rho_y = 1{,}35$ г/см^3. Зная это, можно посчитать плотности самого лёгкого и самого тяжёлого из кубиков и найти ошибку. Плотность ρ_3 найдена правильно, а верное значение для плотности ρ_1 должно быть не 2,40 г/см^3, а 2,30 г/см^3.

Задача 7.3 Сообщающиеся кубики

Запишем условие равновесия кубиков до открытия крана:

$$mg + 3T = \rho_1 g a^3, \quad mg + T = \rho_2 g a^3.$$

Откуда получим, что $\rho_1 - \rho_2 = \frac{2T}{a^3 g}$ и, следовательно, $\rho_1 > \rho_2$. После открытия крана жидкость плотностью ρ_1 (более тяжёлая) частично перетечёт в правый сосуд. Поскольку сила натяжения правой нити при этом увеличилась лишь до $2T$, можно сделать вывод, что перетёкшая жидкость не поднялась до высоты $1{,}5a$. Пусть в лёгкой жидкости находится k-ая часть объёма правого кубика, тогда условие равновесия этого кубика примет вид:

$$mg + 2T = (1-k)\rho_1 g a^3 + k\rho_2 g a^3.$$

Можно заметить, что удвоенная левая часть этого уравнения равна сумме левых частей первых двух уравнений. Поэтому

$$2(1-k)\rho_1 g a^3 + 2k\rho_2 g a^3 = \rho_1 g a^3 + \rho_2 g a^3 \quad \Rightarrow \quad 2(1-k)\rho_1 + 2k\rho_2 = \rho_1 + \rho_2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \rho_1 - \rho_2 = 2k\left(\rho_1 - \rho_2\right) \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}5.$$

Высота столба тяжёлой жидкости в правом сосуде равна $h_1 = a$, и в левом сосуде кубик остаётся полностью погружённым в жидкость. Из условия несжимаемости жидкостей найдём Δh, изменение уровня жидкости в сосудах:

$$\Delta h \cdot 4a^2 = a \cdot 4a^2 - \frac{a}{2} \cdot a^2 \Rightarrow \Delta h = \frac{7a}{8}.$$

Запишем условие равенства давлений на уровне трубки (p_0 — атмосферное давление):

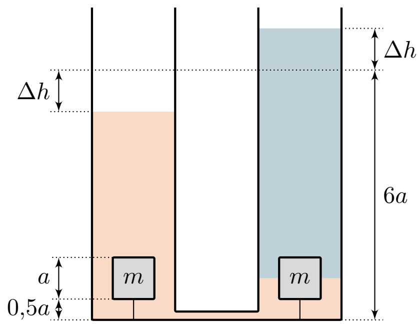
$$p_0 + \rho_1 g(6a - \Delta h) = p_0 + \rho_1 g a + \rho_2 g(6a + \Delta h - a) \Rightarrow \rho_2 = \frac{33}{47}\rho_1.$$

Подставляем это соотношение в ранее полученное равенство:

$$\rho_1 - \frac{33}{47}\rho_1 = \frac{2T}{a^3 g} \Rightarrow \rho_1 = \frac{47T}{7a^3 g}, \quad \rho_2 = \frac{33T}{7a^3 g}.$$

Из условия равновесия кубика находим его массу:

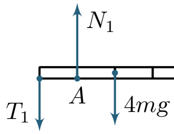
$$mg + T = \frac{33T}{7a^3 g} g a^3 \Rightarrow m = \frac{26T}{7g}.$$



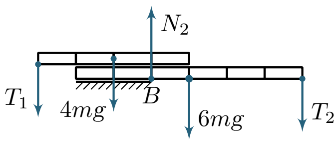
Задача 7.4 Жук на стержне

Пусть T_1 и T_2 — силы натяжения левой и правой нитей соответственно.
1. Рассмотрим случай, когда жук располагается на левом краю стержня. Из правила моментов для лёгкого стержня относительно оси, проходящей через его левый край, получаем силу натяжения правой нити $T_2 = 0$. Значит, сила натяжения левой нити $T_1 = Mg$ (это следует из условия равновесия стержня: $T_1 + T_2 = Mg$).

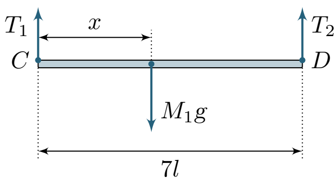
Определим максимальное значение массы жука $M_{\max}$, при котором верхняя балка ещё неподвижна. При $M = M_{\max}$ верхняя балка касается нижней только в т. A. По правилу моментов относительно оси, проходящей через точку A, для верхней балки получаем $T_1 l = 4mgl$, где $T_1 = M_{\max}g$. Откуда $M_{\max} = 4m$.



Найдём теперь минимальное значение массы жука $M_{\min}$, при котором ещё не проворачивается система из двух балок относительно оси, проходящей через т. B. По правилу моментов относительно указанной оси получаем $T_1{\cdot}3l{+}4mg{\cdot}l = 6mg{\cdot}l$, где $T_1 = M_{\min}g$. Откуда $M_{\min} = \frac{2}{3}m$. Значит равновесие системы возможно при $\frac{2}{3}m \leqslant M \leqslant 4m$.



2. Рассмотрим момент времени, когда жук массой $M = M_1$ удалился от левого края на расстояние x. Определим силы натяжения нитей по правилу моментов для невесомого стержня относительно осей C и D соответственно:



$$T_2 \cdot 7l = M_1 g \cdot x, \text{ значит } T_2 = M_1 g \frac{x}{7l};$$

$$T_1 \cdot 7l = M_1 g(7l - x), \text{ значит } T_1 = M_1 g \left(1 - \frac{x}{7l}\right).$$

Если M_1 удовлетворяет неравенству, полученному в п. 1, повернуться вокруг оси, проходящей через т. A, система не может, так как по мере движения T_1 уменьшается. Но T_2 увеличивается, поэтому при достижении $x = L$ система начинает поворачиваться относительно оси, проходящей через т. B. Воспользуемся правилом моментов для системы, состоящей из двух балок, относительно указанной оси:

$$T_1 \cdot 3l + 4mg \cdot l = T_2 \cdot 4l + 6mg \cdot l,$$

$$M_1 g \left(1 - \frac{L}{7l}\right) \cdot 3l + 4mg \cdot l = M_1 g \frac{L}{7l} \cdot 4l + 6mg \cdot l,$$

откуда $L = \frac{3M_1 - 2m}{M} l = \left(3 - 2\frac{m}{M_1}\right) l$.

Заметим, что $L = L_{\max} = 2{,}5l$ при $M_1 = M_{\max} = 4m,$ то есть $\alpha = \frac{M_{\max}}{m} = 4$.

8 класс. Возможные решения

Задача 8.1 Переменное сечение

Пусть d — расстояние между передней и задней стенками сосуда. Рассмотрим случай, когда в правую часть сосуда наливают керосин массой M, и, вследствие этого, поршень сдвигается влево на величину x (см. рис.). Высота слоя керосина в этом случае будет равна

$$h = \frac{M}{\rho_к (L+x)d}.$$

Запишем условие равенства давлений на уровне границы воды и керосина

$$\rho_в g h_1 = \frac{Mg}{(L+x)d}$$

и условие равновесия поршня:

$$F_0 + p \cdot \frac{h_1 d}{2} + kx = F_0 + p \cdot \frac{hd}{2},$$

где $p = \frac{Mg}{(L+x)d}$, а F_0 — сила давления воды ниже границы с керосином (одинаковая с обеих сторон). Отсюда получим, что

$$kx = \frac{Mg}{(L+x)d} \cdot \frac{(h-h_1)\,d}{2} =$$

$$= \frac{Mg}{2(L+x)} \cdot \left(\frac{M}{\rho_к (L+x)d} - \frac{M}{\rho_в (L+x)d}\right) =$$

$$= \frac{M^2 g}{2(L+x)^2 d} \cdot \left(\frac{1}{\rho_к} - \frac{1}{\rho_в}\right),$$

Следовательно, выражение $x(L+x)^2 = AM^2$, где $A = \text{const}$.

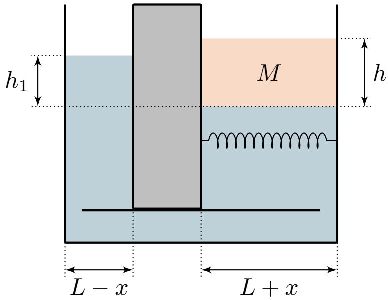
В первом случае, когда $M = m$, $x = L/3$. Поэтому $A = \frac{\frac{L}{3}\cdot\left(\frac{4L}{3}\right)^2}{m^2} = \frac{16L^3}{27m^2}$. Тогда при $x = L/2$ получим, что

$$m_1^2 = \frac{\frac{L}{2}\cdot\left(\frac{3L}{2}\right)^2}{A} = \frac{9L^3/8}{16L^3/27}\cdot m^2 = \frac{243m^2}{128} \Rightarrow m_1 = \frac{9}{8}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}m \approx 1{,}38m.$$

Пусть теперь $x = L$ (поршень упёрся в левую стенку). Определим при какой массе $m_{крит}$ керосина это происходит:

$$m_{крит}^2 = \frac{L\cdot(2L)^2}{A} = \frac{4L^3}{16L^3/27}\cdot m^2 = \frac{27m^2}{4} \Rightarrow m_{крит} = \frac{3\sqrt{3}}{2}m \approx 2{,}6m.$$

Отсюда следует, что при массе керосина $3m$ (большей, чем $m_{крит}$) поршень будет прижат вплотную к левой стенке, то есть $l = L$.



Задача 8.2 Ромбическое равновесие

Поскольку стержни однородные, центры масс находятся ровно в их серединах. Запишем правило моментов для внешних сил относительно точки крепления верхнего шарнира:

$$T_1 \cdot 2x + mg \cdot x + 2mg \cdot x = 3mg \cdot x + 4mg \cdot x,$$

откуда $T_1 = 2mg$.
Силу F найдём из условия равновесия всей системы:

$$F = (m + 2m + 3m + 4m + 5m)g - T_1 = 15mg - T_1 = 13mg.$$

Для нахождения силы натяжения T_2 воспользуемся методом виртуальных перемещений. Пусть точка крепления правой нити к правому верхнему стержню сместилась вниз на малое расстояние Δh (из-за малости смещения отклонением правой нити от вертикали можно пренебречь). Тогда центры тяжести стержней с массами m и $4m$ сместятся вниз на $\Delta h/2$, стержней с массами $2m$ и $3m$ — на $3\Delta h/2$, а груз опустится на $2\Delta h$:

$$T_1 \cdot \Delta h + T_2 \cdot \frac{3\Delta h}{2} - T_2 \cdot \frac{\Delta h}{2} = 4mg \cdot \frac{\Delta h}{2} + mg \cdot \frac{\Delta h}{2} + 3mg \cdot \frac{3\Delta h}{2} + 2mg \cdot \frac{3\Delta h}{2} + 5mg \cdot 2\Delta h.$$

Откуда с учетом известного значения для T_1 получим:

$$T_1 + T_2 = 20mg \Rightarrow T_2 = 18mg.$$

Задача 8.3 Оптимальная температура

Введём обозначения: $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta \tau}$ — массовый расход воды для каждого крана (масса воды, поступающая в единицу времени), c — удельная теплоёмкость воды. По условию задачи мощность теплоотдачи от воды в окружающую среду $P = \alpha\,(t_x - t_0)$, где t_x — температура воды в аквариуме, α — некоторый постоянный коэффициент. Мощность может быть и отрицательная, если $t_x < t_0$. Предположим, что в установившемся режиме за время $\Delta\tau$ в аквариум поступает из крана с номером k вода массой Δm при температуре T_k. А так как аквариум проточный, то за время $\Delta\tau$ такая же по массе вода должна сливаться из аквариума уже при установившейся температуре t_x.

1. Запишем с учётом этого следствие уравнений теплового баланса для двух установившихся случаев — когда открыт только второй кран и когда открыт только восьмой кран соответственно:

$$c\mu\,(T_2 - t_2) = \alpha\,(t_2 - t_0)\,,$$

$$c\mu\,(T_8 - t_8) = \alpha\,(t_8 - t_0)\,,$$

откуда находим, что $t_0 = 25\,^\circ\mathrm{C}$ и $\frac{c\mu}{\alpha} = 2$.

2. Если открыть сразу все краны, то условие теплового баланса будет выглядеть следующим образом: $c\mu\,(T_1 - t) + c\mu\,(T_2 - t) + \ldots c\mu\,(T_8 - t) = \alpha\,(t - t_0)$, или

$$\frac{c\mu}{\alpha}\,(T_1 + \ldots + T_8) - 8\cdot\frac{c\mu}{\alpha}\cdot t = t - t_0,$$

откуда

$$t = \frac{t_0 + 2\,(T_1 + \ldots + T_8)}{17} \approx 22{,}6\,^\circ\mathrm{C} \approx 23\,^\circ\mathrm{C}.$$

3. Если открыть три крана с номерами n, m и l (при закрытых оставшихся), установится температура t_x, и условие теплового баланса примет вид:

$$c\mu\,(T_n - t_x) + c\mu\,(T_m - t_x) + c\mu\,(T_l - t_x) = \alpha\,(t_x - t_0)\,.$$

С учётом того, что $\frac{c\mu}{\alpha} = 2$ и $T_k = k\cdot 5\,^\circ\mathrm{C}$, получаем соотношение:

$$n + m + l = \frac{7t_x - t_0}{10\,^\circ\mathrm{C}}.$$

Приняв $t_x = t_{\text{оп}}$, посчитаем значение дроби: $\frac{7t_x - t_0}{10^\circ\mathrm{C}} = 17{,}8$. Но сумма $n + m + l$ может принимать только целые значения. Поэтому, $n + m + l = 18$ (наиболее близкое к 17,8 целое значение). Этому соответствует температура $t_x \approx 29{,}3^\circ\mathrm{C}$. Подберём все возможные подходящие тройки значений $(n; m; l)$:

$$(8; 7; 3),\ (8; 6; 4),\ (7; 6; 5).$$

4. При уменьшении температуры воздуха в домике на Δt в соотношении для суммы $n+m+l$ достаточно заменить t_0 на $t_0-\Delta t$. Приняв $t_x=t_{\text{оп}}$, посчитаем значение дроби: $\frac{7t_x-(t_0-\Delta t)}{10^\circ\text{C}}=18{,}4$. Заметим, что результат не изменится, так как наиболее близкое к 18,4 целое число это 18. Температура при этом установится $t_x\approx 28{,}4\,^\circ\text{C}$.

Задача 8.4 Измерение малых сопротивлений

Так как $h_i \ll l_j$, то можно пользоваться формулой для нахождения сопротивления участка ленты $R = \rho\frac{l}{S}$, где l — длина, S — площадь поперечного сечения. Сопротивление проводника (куска ленты) зависит от положения x второго контакта по закону:

$$R(x) = \begin{cases} \rho\frac{x}{h_1 d}, & 0 < x < l_1, \\ \rho\frac{x}{h_2 d} + \rho\frac{l_1}{d}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right), & l_1 < x < l_1 + l_2, \\ \rho\frac{x}{h_3 d} + \rho\frac{l_1}{d}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_3}\right) + \rho\frac{l_2}{d}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right), & l_1 + l_2 < x < l_1 + l_2 + l_3. \end{cases}$$

Заметим, что на всех рассматриваемых участках сопротивление фигуры линейно зависит от x. При подключении куска ленты к амперметру и батарейке показания амперметра становятся равными $I = \frac{U_0}{R(x)+r}$, где r — суммарное сопротивление подводящих проводов и амперметра. Уравнение можно переписать в виде $\frac{1}{I} = \frac{R(x)}{U_0} + \frac{r}{U_0}$. Так как зависимость $R(x)$ линейная на каждом из участков (кусочно-линейная), то и зависимость $\frac{1}{I}(x)$ также кусочно-линейная:

$$\frac{1}{I} = \begin{cases} \rho\frac{x}{h_1 U_0 d} + \frac{r}{U_0}, & 0 < x < l_1, \\ \rho\frac{x}{h_2 U_0 d} + \rho\frac{l_1}{U_0 d}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \frac{r}{U_0}, & l_1 < x < l_1 + l_2, \\ \rho\frac{x}{h_3 U_0 d} + \rho\frac{l_1}{U_0 d}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_3}\right) + \rho\frac{l_2}{U_0 d}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) + \frac{r}{U_0}, & l_1 + l_2 < x < l_1 + l_2 + l_3. \end{cases}$$

Построим график зависимости $\frac{1}{I}(x)$, предварительно пересчитав значения $\frac{1}{I}$:

x, см	20	60	100	140	180	220	260
I, мА	818	455	315	241	204	182	165
$1/I$, А$^{-1}$	1,22	2,20	3,17	4,15	4,90	5,49	6,06
x, см	300	340	380	420	460	500	
I, мА	150	138	130	124	119	114	
$1/I$, А$^{-1}$	6,67	7,25	7,69	8,06	8,40	8,77	

Через полученные точки проведём три последовательных отрезка прямых. Точки излома графика соответствуют $x = l_1$ и $x = l_1 + l_2$. Таким образом, $l_1 \approx 155$ см, $l_2 \approx 195$ см, $l_3 \approx 150$ см. Найдём угловой коэффициент для третьего участка графика и из него определим значение d :

$$k_3 = \frac{8{,}5 - 7{,}4}{470 - 350}\ \frac{1}{\text{А·см}} \Rightarrow d = \frac{\rho}{h_3 U_0 k_3} \approx 0{,}1 \text{ мм}.$$

Теперь найдём угловые коэффициенты первого и второго участка графиков, а с помощью них h_1 и h_2:

$$k_1 = \frac{4{,}9 - 1{,}1}{170 - 15}\ \frac{1}{\text{А}\cdot\text{см}} \Rightarrow h_1 = \frac{\rho}{U_0 d k_1} \approx 3\ \text{мм},$$
$$k_2 = \frac{7{,}4 - 4{,}9}{350 - 180}\ \frac{1}{\text{А}\cdot\text{см}} \Rightarrow h_2 = \frac{\rho}{U_0 d k_2} \approx 5\ \text{мм}.$$