Всероссийская олимпиада по физике имени Дж. К. Максвелла

Заключительный этап
Теоретический тур

2021

Комплект задач подготовлен Центральной предметно-методической комиссией по физике Всероссийской олимпиады школьников

Авторы задач

7 класс

1. Рубцов Д.
2. Замятнин М.
3. Замятнин М.
4. Гусихин П., Заяц А.

8 класс

1. Слободянин В.
2. Слободянин В.
3. Евсеев А.
4. Слободянин В.

Общая редакция — Слободянин В., Киреев А., Заяц А., Клепиков М., Инишева О.

Иллюстрации — Клепиков М., Заяц А.

Вёрстка — Клепиков М., Васенин Е., Заяц А.

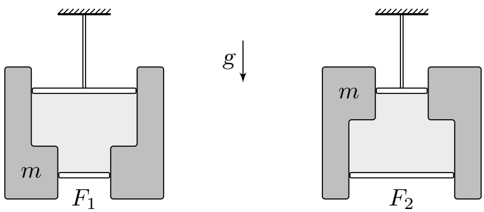
7 класс

Задача 7.1 «Навигатор»

Экспериментатор Глюк выехал на автомобиле на вокзал, расстояние до которого $S = 10$ км. Первую часть пути он ехал со скоростью v_1, а затем со скоростью v_2. Бортовой навигатор показывал не только маршрут, но и предполагаемое расчётное время до приезда на вокзал. Что любопытно, надпись «Осталось $\tau_0 = 12$ мин 00 с» появлялась трижды в моменты времени $\tau_1 = 0$ мин 30 с, $\tau_2 = 3$ мин 00 с, $\tau_3 = 12$ мин 00 с. Определите по этим данным v_1, v_2, а также время всего движения τ. Показания навигатора Глюка рассчитывались как отношение оставшегося пути к средней скорости автомобиля на пройденном к этому моменту времени расстоянии.

Задача 7.2 «Качаем пресс»

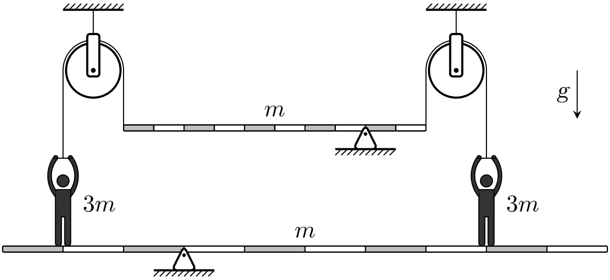
Для того, чтобы подвешенный за верхний поршень гидравлический пресс оставался в покое, к его нижнему поршню необходимо прикладывать вертикальную силу $F_1 = 50$ Н (см. рис. а). Если пресс перевернуть и подвесить за другой поршень, то для его равновесия к нижнему поршню нужно будет приложить вертикальную силу $F_2 = 200$ Н (см. рис. б). Определите, в какую сторону направлены силы F_1 и F_2. Найдите, во сколько раз отличаются площади поршней и чему равна масса m пресса. Массой поршней и жидкости внутри пресса можно пренебречь. Трения в системе нет, $g = 10$ Н/кг.



а) б)

Задача 7.3 «Зыбкое равновесие»

На рисунке представлена система, состоящая из двух однородных стержней массой m, шарнирно закреплённых на опорах, лёгких нитей, перекинутых через блоки. На нижнем стержне стоят два человека массой $3m$ каждый, с помощью нитей удерживающие систему в равновесии. Определите силы давления людей на нижний стержень и силы натяжения нитей. Участки нитей, не касающиеся блоков, вертикальны. Стержни горизонтальны, и каждый из них разделён на равные отрезки. Трение в шарнирах и осях блоков отсутствует.



Задача 7.4 «Лишние калории»

Теоретик Баг с помощью неподвижного блока поднял на высоту $h = 10$ м оборудование общей массой $m_1 = 1000$ кг. Для компенсации потерь энергии, затраченной на подъём груза, ему потребовалось употребить с едой на 500 килокалорий больше, чем в обычный рабочий день, проведённый на стуле за компьютером. На следующий день Баг заметил несколько ящиков общей массой $m_2 = 240$ кг, которые он вчера забыл поднять. Проявив сообразительность, он, используя тот же блок, для движения верёвки применил электродвигатель с КПД $\eta_{\text{эд}} = 70\,\%$. Баг определил, что для подъёма груза m_2 электродвигатель потребил 10 Вт·ч электроэнергии. Чему равны КПД $\eta_{\text{б}}$ блока и η самого Бага? Коэффициент $g = 10$ Н/кг, 1 калория равна 4,2 Дж.

Примечание: КПД человека равен отношению совершённой им работы к потреблённой им для этого энергии.

8 класс

Задача 8.1 «Средняя скорость»

Танк n-ную часть всего пути ехал по болотистой местности со скоростью $v_1 = 8$ км/ч. Затем n-ную часть всего времени он ехал по шоссе со скоростью $v_2 = 32$ км/ч. Наконец, оставшийся участок пути он двигался по просёлочной дороге со скоростью, равной средней скорости $v_{\text{ср}}$ на всём пути. Вычислите $v_{\text{ср}}$. При каких значениях n такое движение возможно?

Задача 8.2 «Скрытая масса»

К левому концу неоднородного стержня, шарнирно закреплённого на неподвижной опоре, подвешен груз массой m_1, а к правому концу стержня — груз массой $m_2 = 4{,}0$ кг. Система находится в равновесии. Затем груз массой m_2 убрали, на его место перенесли груз массой m_1, а на левый конец подвесили груз массой $m_3 = 2{,}5$ кг, и система снова оказалась в равновесии. Определите, при каких значениях массы m_1 это возможно. Известно, что центр масс стержня находится справа от точки опоры.

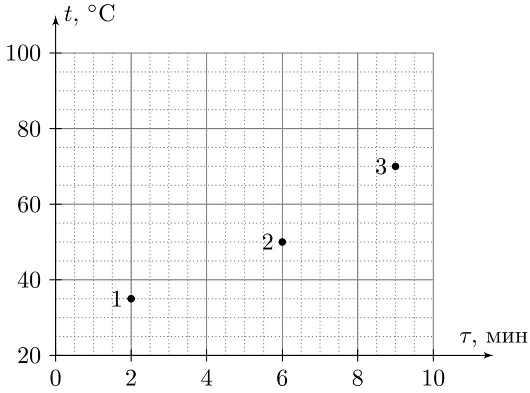
Задача 8.3 «Три плитки и одна кастрюля»

Воду комнатной температуры $t_0 = 20\,^\circ\text{C}$ нагревали в кастрюле в течение 10 мин последовательно на трёх разных плитках, причём перенос с одной плитки на другую происходил быстро. Значения температуры t воды в разные моменты времени τ занесли в таблицу, но затем на неё случайно пролили варенье и часть данных пропала. Осталось только 3 точки, которые нанесли на график (см. рис.).

Известно, что точки 1, 2 и 3 относятся к моментам нагрева на первой, второй и третьей плитках соответственно. Также сохранилась информация, что третья плитка в два раза мощнее первой, и за всё время нагрева вода получила 1100 кДж теплоты.

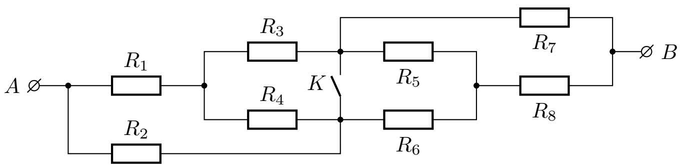
1. Определите конечную температуру воды.
2. Найдите массу воды.
3. Какую мощность могла иметь вторая плитка?
4. Какое время длился нагрев кастрюли на второй плитке?

Примечание: Тепловые потери и теплоёмкость кастрюли пренебрежимо малы, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot\,^\circ$C).



Задача 8.4 «8 резисторов»

В электрической цепи, представленной на рисунке, сопротивление резисторов $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, а $R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 2R$. Определите сопротивление между клеммами A и B при замкнутом и разомкнутом ключе K. Определите силу тока через замкнутый ключ при подключении к клеммам A и B идеального источника с напряжением U.



7 класс. Возможные решения

Задача 7.1 «Навигатор»

Ответ: $v_1 = 48$ км/ч, $v_2 = 20$ км/ч, $t_0 = 27$ мин.

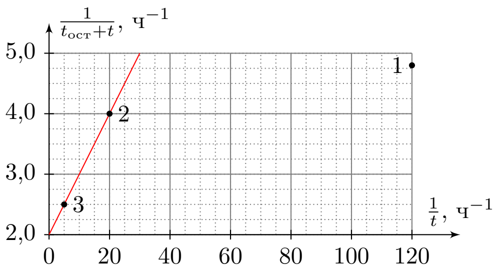
Оставшийся путь есть разность всего пути и пройденного $S_{\text{ост}} = S - S_{\text{пр}}$. Итак, оставшееся время можно рассчитать как

$$t_{\text{ост}} = \frac{S_{\text{ост}}}{v_{\text{ср}}} = \frac{S - S_{\text{пр}}}{v_{\text{ср}}} = \frac{S}{v_{\text{ср}}} - t,$$

где t — время, в которое навигатор показывает данное расчетное время, а $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость движения автомобиля к этому времени. Когда Глюк движется по первому участку пути, средняя скорость — есть величина постоянная $v_{\text{ср}} = v_1 = \text{const}$, тогда и $t_{\text{ост}} + t = \text{const}$. Заметим, что $\tau_1 + \tau_0 \neq \tau_2 + \tau_0$, значит в моменты времени τ_2 и τ_3 Глюк ехал со скоростью v_2. Получим зависимость средней скорости автомобиля от времени при движении на втором участке пути: $v_{\text{ср}} = \dfrac{v_1 t_1 + v_2(t - t_1)}{t}$, где t_1 — время движения по шоссе. С учетом этого,

$$t_{\text{ост}} = \frac{S}{v_{\text{ср}}} - t = \frac{St}{(v_1 - v_2)t_1 + v_2 t} - t.$$

Заметим, что график зависимости $\dfrac{1}{t_{\text{ост}} + t}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ является прямой вида $y = kx + b$, т.к. $\dfrac{1}{t_{\text{ост}} + t} = \dfrac{(v_1 - v_2)t_1}{S} \cdot \dfrac{1}{t} + \dfrac{v_2}{S}$. Построим такой график.



Точка 1 не ложится на прямую 2 - 3, а значит в момент времени τ_1 автомобиль двигался по шоссе. Итак, $v_1 = \dfrac{S}{\tau_1 + \tau_0} = 48$ км/ч. По пересечению графика с осью ординат находим $v_2 = S \cdot 2$ ч$^{-1}$ $= 20$ км/ч. Угловой коэффициент графика $\dfrac{(v_1 - v_2)t_1}{S} = 0{,}1$, откуда $t_1 = 1/28$ ч. Всё время движения $t_0 = t_1 + \dfrac{S - t_1 v_1}{v_2} = 27$ мин.

Задача 7.2 «Качаем пресс»

Ответ: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{F_2}{F_1} = 4.$

Так как жидкость невесома, то можно считать, что давление во всем ее объеме одинаковое. Пусть это давление в первом случае равно p_1, а во втором — p_2. Площадь большого поршня обозначим S_1, а малого — S_2. Пусть атмосферное давление равно p_0. Запишем условие равновесия пресса:

$$mg + p_1(S_1 - S_2) = p_0(S_1 - S_2), \tag{1}$$

откуда следует, что $p_1 < p_0$. Чтобы обеспечить такое соотношение давлений, силу F_1, приложенную к нижнему поршню, необходимо направить вниз. Тогда его условие равновесия примет вид:

$$p_0 S_2 = p_1 S_2 + F_1. \tag{2}$$

Рассуждая аналогично, запишем условия равновесия пресса и нижнего поршня во втором случае:

$$mg + p_0(S_1 - S_2) = p_2(S_1 - S_2), \tag{3}$$

$$p_2 S_1 = p_0 S_1 + F_2, \tag{4}$$

здесь учтено, что $p_0 < p_2$ и, следовательно, сила F_2 направлена вверх. Исключая разность давлений p_0 и p_1 (из уравнений 1 и 2), и разность давлений p_2 и p_0 (из уравнений 3 и 4), получим:

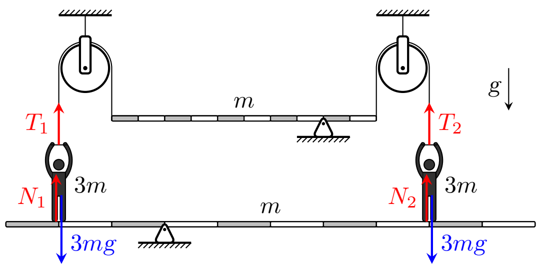
$$\frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{mg}{F_1} \text{ и } \frac{S_1 - S_2}{S_1} = \frac{mg}{F_2}.$$

Откуда находим $mg = F_2 - F_1 = 150$ Н, и $m = 15$ кг. Отношение площадей сечения поршней $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{F_2}{F_1} = 4.$

Задача 7.3 «Зыбкое равновесие»

Ответ: $N_1 = \dfrac{71}{36}mg,\ N_2 = \dfrac{7}{18}mg,\ T_1 = \dfrac{37}{36}mg,\ T_2 = \dfrac{47}{18}mg.$

Сделаем рисунок, расставим силы, действующие на людей и стержни (см. рис.).



Запишем условие равновесия всех тел, входящих в систему:

$$N_1 + T_1 = 3mg,$$

$$N_2 + T_2 = 3mg,$$

$$8b \cdot T_1 = mg \cdot 3b + T_2 \cdot 2b,$$

$$N_1 \cdot 2a = mg \cdot 2a + N_2 \cdot 5a.$$

Здесь a — расстояние между метками на нижнем стержне, b — на верхнем стержне. Решив систему уравнений, получим:

$$N_1 = \frac{71}{36}mg, \; N_2 = \frac{7}{18}mg,$$

$$T_1 = \frac{37}{36}mg, \; T_2 = \frac{47}{18}mg.$$

Задача 7.4 «Лишние калории»

Ответ: $\eta_{эд} = 7/10 = 70\,\%$, $\eta_б = 20/21 \approx 95{,}2\,\%$, $\eta = 1/20 = 5{,}0\,\%$.

Запишем выражения для КПД блока, Бага и двигателя:

$$\eta_б = \frac{m_1gh}{A} = \frac{m_2gh}{A_{эд}}, \qquad \eta = \frac{A}{E_{еды}}, \qquad \eta_{эд} = \frac{A_{эд}}{E_{эд}}.$$

Здесь A — работа, совершаемая Багом, $A_{эд}$ — работа, совершаемая электродвигателем, $E_{еды} = 500$ ккал $= 2100$ кДж — энергия, полученная Багом с едой, а $E = 10$ Вт$\cdot$3600 с $= 36$ кДж — электроэнергия, потраченная электродвигателем. Исключая из этих равенств A и $A_{эд}$, получаем

$$\eta_б \cdot \eta = \frac{m_1gh}{E_{еды}} = \frac{100\text{ кДж}}{2100\text{ кДж}} = \frac{1}{21},$$

$$\eta_б \cdot \eta_{эд} = \frac{m_2gh}{E_{эд}} = \frac{24\text{ кДж}}{36\text{ кДж}} = \frac{2}{3}.$$

Так как КПД двигателя $\eta_{эд} = 7/10 = 70\,\%$, КПД блока равен $\eta_б = 20/21 \approx 95{,}2\,\%$. Соответственно, КПД Бага составляет $\eta = 1/20 = 5{,}0\,\%$.

8 класс. Возможные решения

Задача 8.1 «Средняя скорость»

Ответ: $n > 1 + \sqrt{\dfrac{v_2}{v_1}} = 3$.

Общая длина второго и третьего участков с одной стороны равна $L - \dfrac{L}{n} = L\dfrac{n-1}{n}$, а с другой стороны она равна $v_2\dfrac{T}{n} + v_{\text{ср}}\left(T - \dfrac{T}{n} - \dfrac{L}{nv_1}\right)$. Таким образом,

$$L\frac{n-1}{n} = v_2\frac{T}{n} + v_{\text{ср}}\left(T - \frac{T}{n} - \frac{L}{nv_1}\right).$$

Умножим все слагаемые этого уравнения на n/T. В результате получим

$$(n-1)v_{\text{ср}} = v_2 + v_{\text{ср}}(n - 1 - \frac{v_{\text{ср}}}{v_1}).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим:

$$0 = v_2 - \frac{v_{\text{ср}}^2}{v_1} \Rightarrow v_{\text{ср}} = \sqrt{v_1 v_2} = 16\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

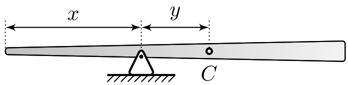
Время движения на последнем участке $T - \dfrac{T}{n} - \dfrac{L}{nv_1} > 0$, поэтому

$$n > 1 + \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = 3.$$

Задача 8.2 «Скрытая масса»

Ответ: $2{,}5$ кг $< m_1 < 3{,}2$ кг.

Пусть длина стержня равна L, а расстояние от точки опоры до левого края стержня — x. Пусть далее масса стержня равна M, а центр масс стержня находится на расстоянии y справа от точки опоры (см. рис.).



Применим правило моментов к первому и второму случаю:

$$m_1 g x = m_2 g(L - x) + Mgy, \tag{1}$$

$$m_3 g x = m_1 g(L - x) + Mgy. \tag{2}$$

Вычтем уравнение (2) из уравнения (1):

$$(m_1 - m_3)x = (m_2 - m_1)(L - x). \tag{3}$$

Отсюда:

$$x = L\frac{m_2 - m_1}{m_2 - m_3}. \tag{4}$$

Поскольку $x < L$, то $m_3 < m_1 < m_2$. Следовательно, $m_1 \in (2{,}5; 4)$ кг. Перепишем уравнение (1) с учётом (4):

$$My = m_1 x - m_2(L - x) = (m_1 + m_2)x - m_2 L = \frac{m_2 m_3 - m_1^2}{m_2 - m_3}L. \tag{5}$$

Мы показали, что $m_2 > m_3$, следовательно из (5) получим:

$$m_1 < \sqrt{m_2 m_3} = \sqrt{10}\ \text{кг}.$$

В итоге получаем $m_3 < m_1 < \sqrt{m_2 m_3}$ или $2{,}5$ кг $< m_1 < 3{,}2$ кг.

Задача 8.3 «Три плитки и одна кастрюля»

Ответ: $85\,^\circ$C, $m = 4$ кг, $N_{\max} = 1057{,}7$ Вт, 3 минуты 40 секунд.

Первая плитка начинает работу при температуре $20\,^\circ$C. При нагревании с постоянной мощностью температура будет изменяться линейно. То есть график нагрева будет представлять ломаную с тремя прямыми отрезками. Обратим внимание, что по оси температур шкала начинается с отметки $20\,^\circ$C. Проведем прямую из начала координат, проходящую через точку 1. Очевидно, что график нагрева кастрюли будет совпадать с этой прямой до момента, когда кастрюлю переставили на вторую плитку.

Обратим внимание, что наклон прямой определяется мощностью плитки. При этом мы знаем, что мощность третьей плитки в 2 раза больше мощности первой. Значит коэффициент наклона графика на третьем участке будет в два раза больше, чем на первом. Построим прямую, удовлетворяющую этому условию и проходящую через точку 3.

Точка на этой прямой, соответствующая времени 10 минут, даст нам значение конечной температуры воды $85\,^\circ$C. Значит, за время эксперимента воду нагрели на $65\,^\circ$C, потратив на это 1100 кДж тепла. Отсюда можно найти массу воды:

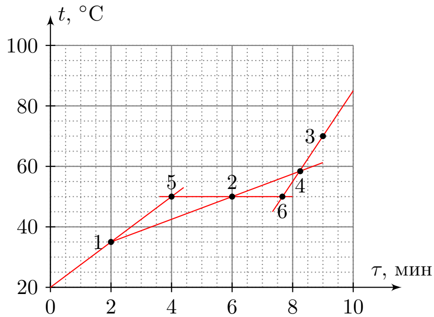
$$m = \frac{Q}{c\Delta t} \approx 4\ \text{кг}.$$

Теперь разберемся, как мог вести себя график на втором участке. Очевидно, что это прямая, проходящая через точку 2. Причем эта прямая должна пересекаться с первой прямой не раньше точки 1 и с третьей — не позже точки 3.

Из этих ограничений вытекает, что максимальной мощности второй плитки соответствует прямая, проходящая через точки 1 и 2. Подсчитаем эту мощность. За 4 минуты (от точки 1 до точки 2) вода нагревается на 15 °C. Значит,

$$N_{\max} = \frac{cm\Delta t}{\Delta \tau} = 1057{,}7\ \text{Вт}.$$

Максимальная мощность, как несложно видеть из графиков, соответствует и максимальному времени работы второй плитки — 6 минут 13 секунд. Минимальное время работы второй платки оценим, как промежуток между точками 5 и 6, которые лежат на горизонтальной прямой, проведенной через точку 2 (эта прямая соответствует нулевой мощности второй плитки). Это 3 минуты 40 секунд.



Задача 8.4 «8 резисторов»

Ответ: $R_1 = \dfrac{9R}{5}$, $I_1 = \dfrac{U}{3R}$, $R_2 = \dfrac{11R}{5}$.

1. Пусть ключ K замкнут, тогда эквивалентная схема будет иметь вид, изображённый на рис. 1. Её сопротивление между клеммами A и B равно

$$R_1 = \frac{3R/2 \cdot R}{3R/2 + R} + \frac{3R \cdot 2R}{3R + 2R} = \frac{3R}{5} + \frac{6R}{5} = \frac{9R}{5}.$$

2. Сопротивление левой половины цепи ровно в 2 раза меньше сопротивления правой, поэтому, когда к клеммам A и B подключено напряжение U, на левую половину придётся $U/3$, а на правую — $2U/3$. Общая сила тока в цепи, при этом, равна

$$I = \frac{U}{R_1} = \frac{5U}{9R}.$$

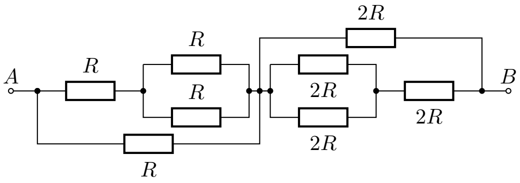


Рис. 1

Определим токи через резисторы:

$$I_2 = \frac{U/3}{R_2} = \frac{U}{3R}, \qquad I_7 = \frac{2U/3}{R_7} = \frac{U}{3R},$$

$$I_1 = I_8 = I - I_2 = \frac{2U}{9R}, \qquad I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = \frac{I_1}{2} = \frac{U}{9R}.$$

Так как $I_3 = I_4 = I_5 = I_6$, то ток через замкнутый ключ равен $I_K = I_2 = I_7 = U/(3R)$.

3. Пусть теперь ключ K разомкнут. Применим к тройкам резисторов R_1, R_2, R_4 и R_5, R_7, R_8 преобразование «треугольник-звезда» (см. рис. 2). В первом случае $r = R$, во втором $r = 2R$.

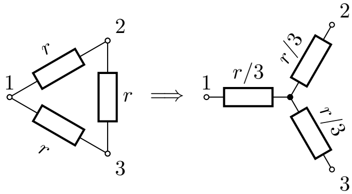


Рис. 2

Преобразованная схема примет вид, изображенный на рис. 3.

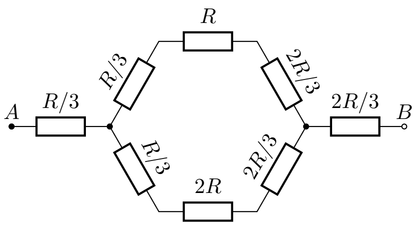


Рис. 3

Сопротивление цепи в этом случае равно

$$R_2 = \frac{R}{3} + \frac{2R \cdot 3R}{2R + 3R} + \frac{2R}{3} = \frac{11R}{5}.$$