Maxwell PhO

Всероссийская олимпиада по физике имени Дж. Кл. Максвелла

Заключительный этап
Теоретический тур

2025

Комплект задач подготовлен
центральной предметно-методической комиссией
Всероссийской олимпиады школьников по физике
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

7 класс

- **7-Т1**. Александр Евсеев
- **7-Т2**. Денис Рубцов
- **7-Т3**. Анна Шишкина
- **7-Т4**. Никита Богословский

8 класс

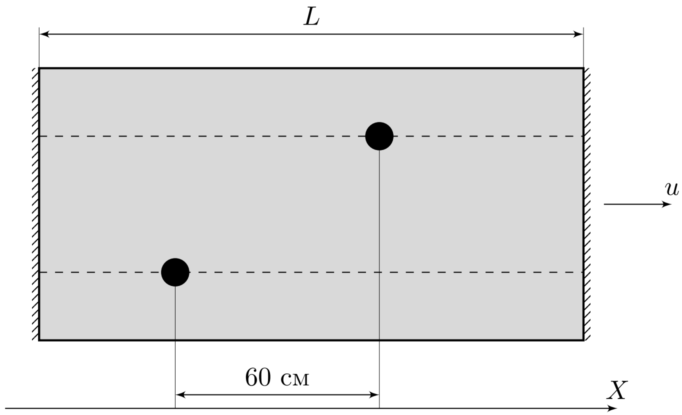
- **8-Т1**. Александр Евсеев
- **8-Т2**. Ольга Инишева, Александр Евсеев
- **8-Т3**. Александр Аполонский
- **8-Т4**. Ольга Инишева

7 класс

Задача №1. Шайбу! Шайбу!

Гладкий массивный прямоугольный стол с узкими высокими бортами движется с постоянной скоростью $u = 10$ см/с относительно земли вдоль оси X, причем длинная сторона стола параллельна ей. По поверхности стола, так же параллельно оси X, скользят две маленькие шайбы. Друг с другом шайбы не сталкиваются, а столкновения шайб с бортами стола абсолютно упругие. В момент начала наблюдения расстояние между шайбами по оси X равнялось 60 см, и шайбы двигались в противоположных направлениях. Время первых шести от момента начала наблюдения столкновений шайб с бортами приведено в таблице:

t_1, с	t_2, с	t_3, с	t_4, с	t_5, с	t_6, с
2	4	7	12	14	17



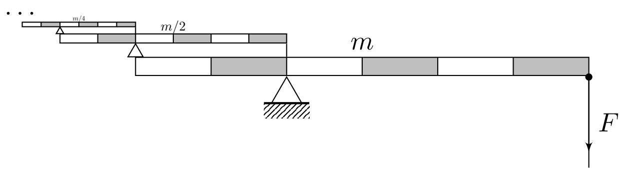
1. Определите длину стола L.

2. Определите модули скоростей шайб v_1 и v_2 относительно земли в начальный момент времени.

Примечание: в результате абсолютно упругого удара скорость шайбы относительно борта остается такой же по величине, как до удара, но направлена противоположно. Скорость стола при этом не меняется.

Задача №2. Много рычагов

Система состоит из большого числа однородных рычагов с массами m, $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{4}$, $\frac{m}{8}, \ldots, \frac{m}{2^N}, \ldots$, а также легких нитей и легких опор. Каждый рычаг поделен на 6 равных частей. Нити соединяют правый край вышестоящего рычага с нижестоящим рычагом в точке, которая делит его в отношении $1:2$ от левого края. Опоры зафиксированы и расположены в точности под точкой крепления нити.

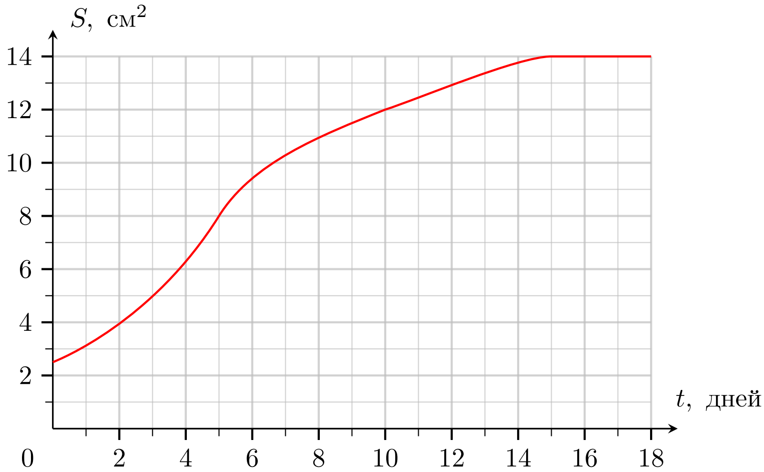


С какой силой F нужно тянуть нить, прикрепленную к правому концу рычага массой m, вертикально вниз, чтобы система оставалась в равновесии?

Задача №3. Денежное дерево

Буратино посадил на Поле Чудес медные монеты. Вскоре из них выросло денежное дерево, и на нем появились плоды. Буратино заметил плоды, когда они стали похожи на маленькие монетки. При этом они имели массу $m_0 = 2$ г, толщину $h = 5$ мм и площадь лицевой стороны $S = 2{,}5$ см^2. Буратино очень обрадовался, стал ухаживать за деревом и регулярно измерять массу и размеры монеток.

Оказалось, что все монетки росли абсолютно одинаково. Толщина монеток оставалась неизменной. Масса менялась по закону $m = m_0 + \alpha t$, где $\alpha = 0{,}4$ г/день, а t – это время в днях от момента, когда Буратино заметил монетки. Зависимость площади лицевой стороны монеток от времени представлена на графике (начиная с 15-го дня размеры монеток перестают меняться).



Справочные данные: плотность меди $\rho_м = 8{,}9$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3.

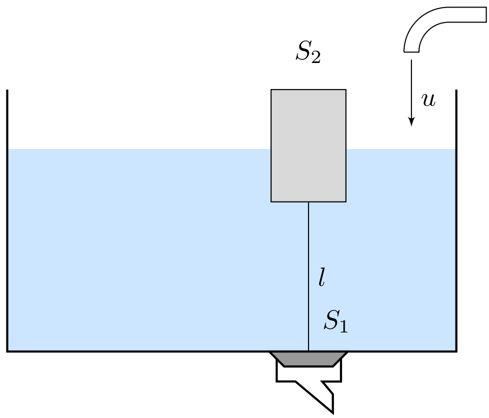
1. Определите дни, когда зреющие монетки, сорванные с дерева, не будут тонуть в воде.

2. Когда монеты созревают и становятся медными, они падают на землю. Через сколько дней после начала наблюдения Буратино сможет собрать поспевшие монеты?

Задача №4. Колебания пробки

Ванна с вертикальными стенками и площадью дна $S = 0{,}73$ м^2 имеет сливное отверстие площадью $S_1 = 30$ см^2.

Отверстие закрыто пробкой массой $m = 600$ г, диаметр которой совпадает с диаметром сливного отверстия. Пробка входит и выходит из сливного отверстия без трения и выполнена из материала плотностью $\rho = 4000$ кг/м^3.



Сверху к пробке на тонкой нерастяжимой нити длиной $l = 20$ см привязан очень легкий высокий поплавок цилиндрической формы с площадью основания $S_2 = 90$ см^2. В ванну с постоянным объемным расходом $u = 1$ л/мин заливают воду ($\rho_в = 1000$ кг/м^3).

1. Определите, до какого уровня h_1 должна подняться вода в ванне, чтобы пробка всплыла. Считайте, что, когда пробка закрывает сливное отверстие, давление под пробкой равно атмосферному.

Когда пробка всплывает, вода начинает вытекать, и ее уровень уменьшается. При этом пробка все время остается над сливным отверстием и, при уменьшении уровня воды в ванне, снова закрывает сливное отверстие.

2. Определите, при каком уровне воды h_2 в ванне пробка снова закроет сливное отверстие. Считайте, что вода вытекает из ванны медленно, и давление воды всегда описывается формулами гидростатики.

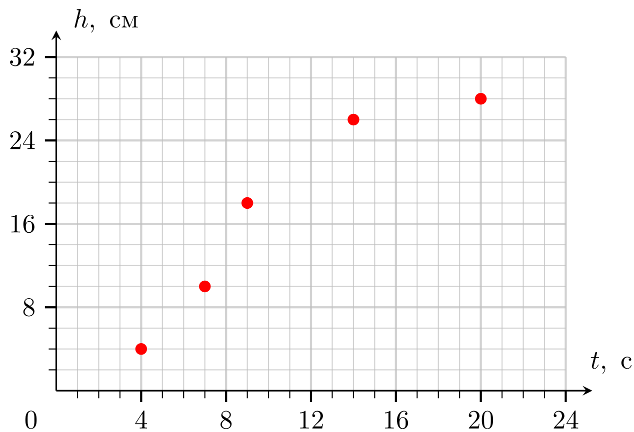
Когда отверстие не закрыто пробкой, вода через него вытекает с постоянной скоростью $v = 3$ л/мин.

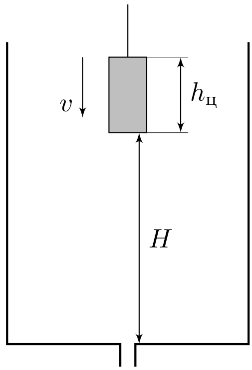
3. Определите, через какое время после того, как пробка всплыла, она всплывет в следующий раз, если объемный расход поступающей воды остается постоянным.

8 класс

Задача №1. Следите за уровнем

В гладком дне сосуда с вертикальными стенками проделано отверстие, к которому подведена трубка. Через трубку в сосуд может подаваться вода с постоянным объемным расходом $\mu = 184$ см^3/с. На высоте H над отверстием на тонкой нити подвешен гладкий цилиндр. Цилиндр достаточно тяжелый, и, если он опустится на дно, то перекроет отверстие, и вода из трубки не сможет попадать в сосуд. Одновременно происходит следующее: в сосуд начинают подавать воду, а цилиндр начинает опускаться с неизвестной постоянной скоростью v. Начиная с этого момента, было сделано несколько измерений высоты уровня воды в сосуде в зависимости от времени. Полученные результаты приведены в координатах $h(t)$:





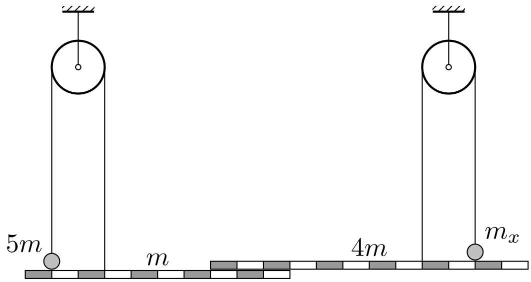
Известно, что из сосуда вода не выливалась, а скорость цилиндра в процессе движения была неизменной.

1. Определите площадь сечения сосуда S_1.
2. Определите скорость цилиндра v.
3. Определите высоту H.
4. Определите площадь основания цилиндра S_2.
5. Определите высоту цилиндра $h_ц$.

Задача №2. Равновесие вчетвером

Из двух однородных рычагов с массами m и $4m$, расположенных друг на друге, как показано на рисунке, нитей и блоков пренебрежимо малых масс, двух шариков с массами $5m$ и m_x собрана система, которая может находиться в равновесии при определенных значениях m_x.

Метки на рычагах находятся на одинаковых расстояниях. Трение в блоках отсутствует, свободные участки нитей вертикальны. Ускорение свободного падения равно g.

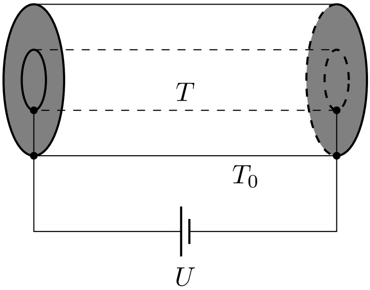


Определите значения m_x, при которых возможно равновесие в данной системе.

Задача №3. Две трубки

К двум длинным соосным металлическим трубкам с торцов герметично приварены два металлических диска. Диски теплоизолированы, подключены к источнику постоянного напряжения и обладают пренебрежимо малым электрическим сопротивлением. Толщина стенок трубок одинаковая и много меньше их радиусов. Радиус внешней трубки вдвое больше радиуса внутренней, длины трубок одинаковые и много больше их радиусов.

При теплообмене между стенками трубок и воздухом количество тепла, проходящее через единицу площади поверхности в единицу времени пропорционально разнице температур трубки и воздуха. Установившаяся температура воздуха внутри малой трубки T, температура воздуха снаружи T_0.



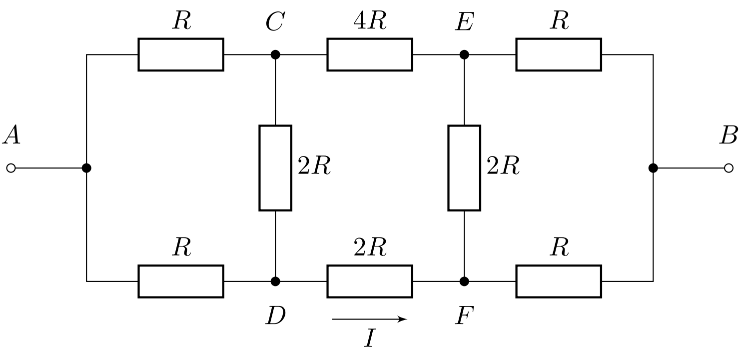
1. Определите температуру внутренней трубки $T_м$.

2. Определите температуру внешней трубки $T_б$.

3. Определите температуру воздуха в зазоре между трубками $T_з$, считая ее одинаковой во всем зазоре.

Задача №4. Двойной мост

В схеме, показанной на рисунке ниже, сила тока на участке DF равна I, и ток направлен от D к F.



1. Определите сопротивление R_{AB} между точками A и B.

2. Определите силы тока и направления токов на участках CD и EF.

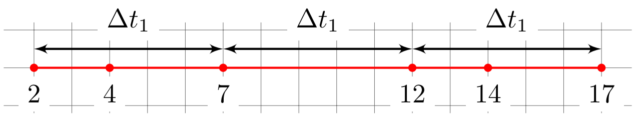
Возможные решения

Задача №7-Т1. Шайбу! Шайбу!

Задачу удобнее всего решать в системе отсчета, связанной со столом. В этой СО шайбы движутся с неизменными по модулю скоростями. Пусть v_1 – начальная скорость шайбы, двигавшейся на старте в том же направлении, что и стол, а v_2 – начальная скорость шайбы, двигавшейся в противоположном направлении (обе скорости – относительно земли). Тогда в СО стола модули их скоростей будут на протяжении наблюдений неизменны и равны соответственно $v_1 - u$ и $v_2 + u$.

Поскольку скорости шайб в СО стола неизменны, между столкновениями одной и той же шайбы с бортами всегда проходит одинаковое время. Из 6 соударений должно найтись хотя бы три, соответствующих одной и той же шайбе. И между этими соударениями совершенно точно проходит одинаковое время.

Таким образом можно определить, что одна из шайб сталкивалась с бортами через 2, 7, 12 и 17 секунд с момента начала наблюдения (с периодичностью $\Delta t_1 = 5$ с). Если аналитически определить соответствующие моменты сложно, то можно использовать простую визуализацию, с которой они хорошо считываются:



Соответственно, вторая шайба сталкивалась с бортами через 4 и 14 секунд (периодичность ее столкновений с бортами $\Delta t_2 = 10$ с).

Тогда, до первого столкновения первая шайба прошла путь $\frac{t_1}{\Delta t_1}L = \frac{2}{5}L$, а вторая $\frac{t_2}{\Delta t_2}L = \frac{2}{5}L$. С учетом того, что сначала шайбы движутся в противоположных направлениях:

$$\frac{2}{5}L + \frac{2}{5}L + \Delta x_0 = L;$$

$$L = 5\Delta x_0 = 300 \text{ см}.$$

Поскольку столкновения шайб с бортами происходят с периодичностью 5 и 10 секунд, их скорости в СО стола равны $\frac{L}{\Delta t_1} = 60$ см/с и $\frac{L}{\Delta t_2} = 30$ см/с.

В то же время, по данным задачи невозможно сказать, какая из шайб двигается быстрее, поэтому возможны две ситуации.

Первая ситуация

$$\begin{cases} v_1 - u = 60 \text{ см/с} \\ v_2 + u = 30 \text{ см/с} \end{cases}$$

$$v_1 = 70 \text{ см/с}$$

$$v_2 = 20 \text{ см/с}$$

Вторая ситуация

$$\begin{cases} v_1 - u = 30 \text{ см/с} \\ v_2 + u = 60 \text{ см/с} \end{cases}$$

$$v_1 = 40 \text{ см/с}$$

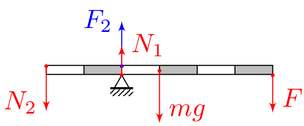
$$v_2 = 50 \text{ см/с}$$

Задача №7-Т2. Много рычагов

Первый способ

Расставим силы на рычаг массой m. Правило моментов относительно точки опоры рычага:

$$N_2 \cdot 2x = mg \cdot x + F \cdot 4x.$$



Равенство суммы сил нулю:

$$F_2 + N_1 = N_2 + mg + F.$$

Если мы посмотрим на систему, состоящую из рычагов с массами $\frac{m}{2}, \frac{m}{4}, \frac{m}{8}, \ldots, \frac{m}{2^N}, \ldots$, то она отличается от исходной системы лишь уменьшением всех масс (а значит и всех сил) в два раза. То есть:

$$N_1 = 2N_2,$$

$$F = 2F_2.$$

Из этих уравнений получаем ответ:

$$F = \frac{mg}{3}.$$

Второй способ

Запишем правило моментов для всей системы. Внешние силы – общая сила тяжести Mg, сила реакции нижней опоры N_1 и искомая F. Пусть L - длина большого рычага, а x_0 – расстояние от нижней опоры до центра масс всей системы.

$$Mg \cdot x_0 = F \cdot \frac{2}{3}L$$

Из суммы ряда $m, \frac{m}{2}, \frac{m}{4}, \frac{m}{8}, \ \ldots, \frac{m}{2^N}, \ldots$ можно получить $M = 2m$.

У системы, состоящей из рычагов с массами $\frac{m}{2}, \frac{m}{4}, \frac{m}{8}, \ \ldots, \frac{m}{2^N}, \ldots$, (общей массой $\frac{M}{2} = m$) центр масс находится на расстоянии $\frac{1}{3}L + \frac{x_0}{2}$ от нижней опоры.

Тогда:

$$2mgx_0 = mg\left(\frac{1}{3}L + \frac{x_0}{2}\right) - mg\frac{1}{6}L.$$

Из этих уравнений получаем $x_0 = \frac{L}{9}$ и окончательный ответ:

$$F = \frac{mg}{3}.$$

Третий способ

Запишем правило моментов для всей системы. Внешние силы – общая сила тяжести Mg, сила реакции нижней опоры N_1 и искомая F. Пусть L - длина большого рычага, а x_0 – расстояние от нижней опоры до центра масс всей системы.

$$Mg \cdot x_0 = F \cdot \frac{2}{3}L$$

Центр масс можно найти «в лоб». От центра масс рычага m центр масс рычага $\frac{m}{2}$ находится на расстоянии $\frac{5}{12}L$. От центра масс рычага $\frac{m}{2}$ центр масс рычага $\frac{m}{4}$ находится на расстоянии $\frac{5}{24}L$ и т.д. Тогда координата центра масс всей системы (считая от центра масс рычага m) находится на расстоянии

$$2mx_C = m \cdot 0 + \frac{m}{2}\frac{5}{12}L + \frac{m}{2}\left(\frac{5}{12}L + \frac{5}{24}L\right) + \frac{m}{4}\left(\frac{5}{12}L + \frac{5}{24}L + \frac{5}{48}L\right) + \ldots =$$

$$= \frac{5}{24}mL\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{2^j} = \frac{5}{24}mL\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(2 - \frac{1}{2^i}\right) =$$

$$= \frac{5}{24}mL\left(2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i} - \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4^i}\right) = \frac{5}{24}mL\left(2 \cdot 2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{9}mL$$

$$x_0 = x_C - \frac{1}{6}L = \left(\frac{5}{18} - \frac{3}{18}\right)L = \frac{L}{9}$$

$$F = \frac{mg}{3}$$

Задача №7-Т3. Денежное дерево

Выведем зависимость $S_0(t)$ для монеток, которые имели бы плотность, равную плотности воды.

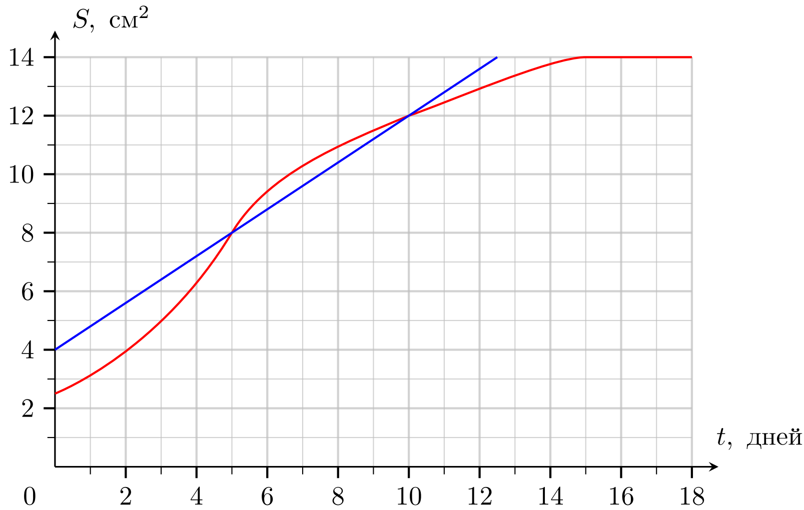
$$S_0(t) = \frac{m_0 + \alpha t}{\rho_{\text{в}} \cdot h}$$

При подстановке числовых значений из условия получим:

$$S_0(t) = (2 + 0{,}4t)/0{,}5 = 4 + 0{,}8t.$$

Формула записана для измерения площади в см^2.

Построим полученную зависимость на данном в условии графике.



Точки пересечения $t_1 = 5$ дней, $S_1 = 8$ см^2 и $t_2 = 10$ дней, $S_2 = 12$ см^2 ограничивают искомую область. В этой области исходный график $S(t)$ лежит выше графика $S_0(t)$, поэтому плотность монеток меньше плотности воды, и они не будут тонуть в ней.

Таким образом, монетки будут плавать в воде с 5-го по 10-й день.

Для меди аналогичная прямая

$$S_1(t) = \frac{m_0 + \alpha t}{\rho_{\text{м}} \cdot h}$$

пересекает вертикальную ось ниже графика $S(t)$ и имеет малый угловой коэффициент, поэтому пересечение данной прямой с графиком $S(t)$ произойдет много позже 15-го дня.

В то же время известно, что после 15-го дня размеры монеток перестали меняться, т.е. $S = 14$ см^2.

Тогда объем монеток тоже остается неизменным: $V = hS = 7$ см^3. Когда монетка станет медной, ее масса будет равна:

$$m = \rho_{\text{м}} V = 62{,}3 \text{ г}.$$

Из зависимости $m = 2 + 0{,}4t$ найдем, что это случится в момент времени $t = 150{,}75$ дня.

Т.е. монеты начнут падать к концу 151-го дня от начала наблюдения. Именно тогда Буратино и сможет собрать урожай.

Задача №7-Т4. Колебания пробки

Когда пробка закрыта, можем рассматривать пробку и поплавок как одно тело. Вниз на это тело действует сила давления воды на пробку и сила тяжести пробки. Вверх действует сила давления воды на поплавок. Обозначим высоту воды в ванне $l + x$, тогда нижняя грань поплавка погружена под воду на глубину x. Запишем условие равенства сил на систему «пробка и поплавок»:

$$mg + \rho_{\text{в}} g(l + x)S_1 = \rho_{\text{в}} g x S_2.$$

Решаем это уравнение относительно x и получаем высоту уровня воды в ванне при всплытии пробки:

$$h_1 = l + x = l + \frac{m + \rho_{\text{в}} l S_1}{\rho_{\text{в}}(S_2 - S_1)} = 0{,}4 \text{ м} = 40 \text{ см}.$$

Для плавающей пробки ее сила тяжести уравновешивается силой Архимеда пробки и поплавка. Пусть глубина погружения поплавка в воду равна y:

$$mg = \rho_{\text{в}} g y S_2 + \rho_{\text{в}} g \frac{m}{\rho}.$$

Выражаем уровень воды в ванне, при котором пробка снова закроет отверстие:

$$h_2 = l + y = l + \frac{m\,(\rho - \rho_{\text{в}})}{\rho \rho_{\text{в}} S_2} = 0{,}25 \text{ м} = 25 \text{ см}.$$

Первый способ

Таким образом, уровень воды должен опуститься от 40 см до 25 см. Учтем, что в момент всплытия поплавка уровень воды в ванне немного опустится. Глубина погружения поплавка уменьшается на $x - y$, значит погруженный объем поплавка уменьшается на $S_2(x - y) = 1,35$ л.

Тогда для того, чтобы пробка снова закрыла отверстие, нужно чтобы из ванны вылилось $(S - S_2)(x - y) \approx 108$ л воды.

При этом вода продолжает наливаться из крана. Поэтому объем воды в ванне уменьшается со скоростью $v - u = 2$ л/мин. Приблизительно через 54 мин из ванны выльется необходимый объем воды, и пробка снова закроется.

После того, как пробка снова закрыла сливное отверстие, уровень воды начинает подниматься. Время набора воды до следующего всплытия пробки равно:

$$\frac{(x-y)(S-S_2)}{u} \approx 108 \text{ мин.}$$

Таким образом, время между всплытиями пробки будет равно 162 мин.

Второй способ

Найдем объем воды в ванне в момент, когда пробка отрывается от дна:

$$V_{\text{откр}} = Sh_1 - S_2 x.$$

Теперь посчитаем объем воды в ванне в момент, когда пробка снова закрывает отверстие:

$$V_{\text{закр}} = Sh_2 - S_2 y.$$

За время, пока пробка не будет закрывать отверстие, из ванны выльется объем:

$$\Delta V = V_{\text{откр}} - V_{\text{закр}} = S\left(h_1 - h_2\right) - S_2(x-y) = \left(S - S_2\right)\left(x - y\right) \approx 108{,}15 \text{ л.}$$

На это потребуется время:

$$t_1 = \frac{\Delta V}{v-u} \approx 54 \text{ мин.}$$

После этого объем воды в ванне опять станет расти. И когда он будет равен $V_{\text{откр}}$, сливное отверстие снова откроется. Произойдет это через время:

$$t_2 = \frac{\Delta V}{u} \approx 108 \text{ мин.}$$

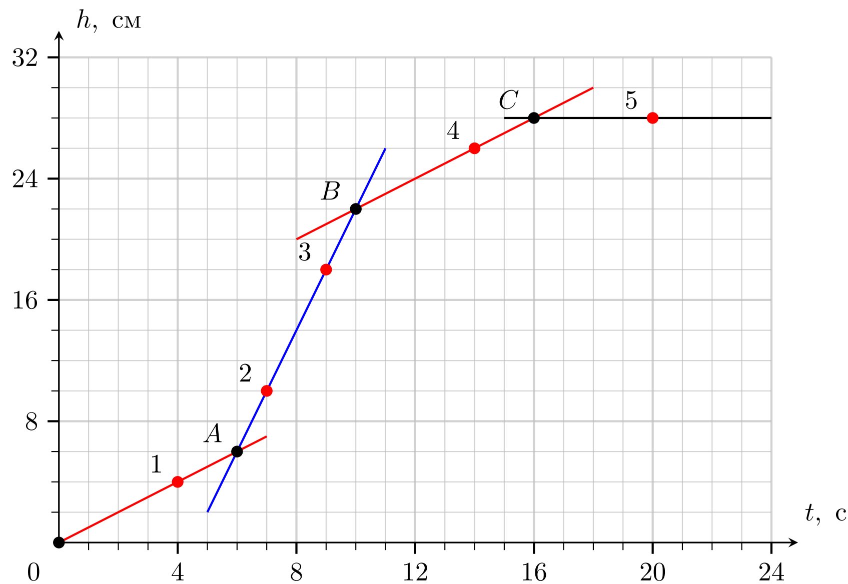
Таким образом, между всплытиями пробки будет проходить время:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{v\Delta V}{u(v-u)} \approx 162 \text{ мин.}$$

Задача №8-Т1. Следите за уровнем

Пронумеруем точки. Объем воды в сосуде увеличивается с постоянной скоростью, поэтому можно спрогнозировать характер графика $h(t)$. Тут возможны 2 варианта:

1. График будет иметь 2 прямых наклонных участка и выходить на плато в момент, когда отверстие перекрывается. Это произойдет, если цилиндр успеет опуститься на дно и при этом не погрузится в воду целиком.
2. Если же вода успеет накрыть цилиндр, график будет иметь 3 прямых наклонных участка и затем выходить на плато. При этом первый и третий отрезки графика должны иметь одинаковый наклон, так как в эти моменты времени повышение уровня воды в стакане будет определяться только поступающей в сосуд водой и не будет зависеть от скорости цилиндра v.



Не сложно заметить, что мы имеем дело со вторым вариантом. Ведь точка 2 не лежит на прямой 0-1, а точка 4 – не лежит на прямой 2-3 и при этом 4-5 не горизонталь. Достроим график. При этом мы учитываем, что прямая 3-4 имеет наклон отличный от наклона прямой 0-1, а значит точка 3 не относится к третьему участку.

Таким образом, точка 0 отвечает нулевому моменту времени, когда началась подача воды в сосуд, отрезок $0A$ описывает процесс, где цилиндр еще не погружен в воду, точка A соответствует ситуации, где дно цилиндра касается воды, отрезок AB описывает процесс частичного погружения цилиндра в воду, точка

B - момент времени, когда верхнее основание цилиндра погрузилось в воду, отрезок BC — цилиндр продолжает движение ко дну сосуда, точка C — момент времени, когда цилиндр достиг дна и перекрыл отверстие с трубкой.

По наклону прямой $0A$ определяем площадь сечения сосуда $S_1 = \frac{\mu t_A}{h_A} = 184$ см^2.

$$S_1 = 184 \text{ см}^2.$$

В точке A цилиндру остается пройти до дна путь h_A, поэтому:

$$v = \frac{h_A}{t_C - t_A} = 0{,}6 \text{ см/с}.$$

$$v = \frac{h_A}{t_C - t_A} = 0{,}6 \text{ см/с}.$$

Зная скорость v и полное время движения цилиндра находим:

$$H = vt_C = 9{,}6 \text{ см}.$$

Для процесса между моментами времени A и B запишем связь объемов:

$$(h_B - h_A)(S_1 - S_2) = \mu\,(t_B - t_A) + v\,(t_B - t_A)\,S_2,$$

откуда:

$$S_2 = \frac{(h_B - h_A)\,S_1 - \mu\,(t_B - t_A)}{(h_B - h_A) + v\,(t_B - t_A)} = 120 \text{ см}^2.$$

$$S_2 = 120 \text{ см}^2.$$

В момент времени B запишем выражение для объема содержимого сосуда:

$$\mu t_B + h_{ц} S_2 = h_B S_1,$$

и тогда:

$$h_{ц} = \frac{h_B S_1 - \mu t_B}{S_2} = 18{,}4 \text{ см}$$

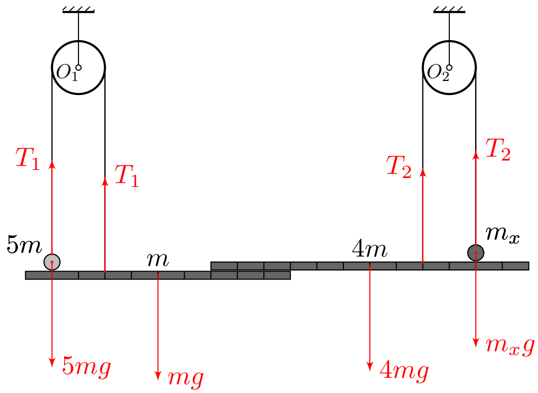
Задача №8-Т2. Равновесие вчетвером

Первый способ. Объединение в систему

Обозначим длину отрезка между двумя соседними метками, нанесенными на рычаги, a.

Рассмотрим равновесие всей системы (рычаг m, рычаг $4m$, груз m_x и груз $5m$), расставим силы, действующие на нее со стороны внешних объектов — двух нитей и земли. Запишем правило моментов для всей системы относительно точки O_1:

$$5mg \cdot a + T_1 \cdot a + T_2 \cdot 13a + T_2 \cdot 15a = T_1 \cdot a + mg \cdot 3a + 4mg \cdot 11a.$$



Из записанного выражения получим:

$$28T_2 = 52mg + 15m_xg.$$

Запишем правило моментов для всей системы относительно точки O_2:

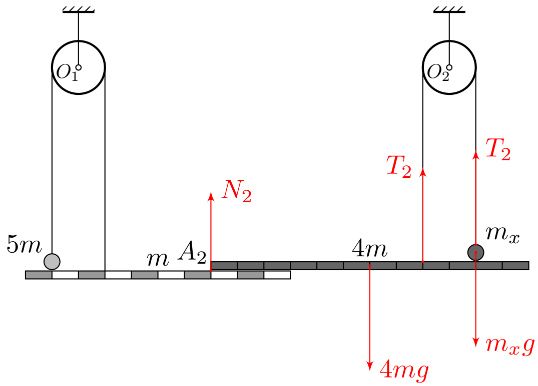
$$m_xg \cdot a + T_2 \cdot a + T_1 \cdot 13a + T_1 \cdot 15a = T_2 \cdot a + 4mg \cdot 3a + mg \cdot 11a + 5mg \cdot 15a.$$

Из записанного выражения получим:

$$28T_1 = 98mg - m_xg.$$

Два крайних значения массы m_x определяются так:

- При минимально возможной массе m_x правый рычаг будет начинать проворачиваться вокруг своей крайней левой точки против часовой стрелки. Сила, с которой рычаги действуют друг на друга, будет сосредоточена в этой точке.
- При максимально возможной массе m_x правый рычаг будет начинать поворачиваться относительно крайней правой точки левого рычага. Сила, с которой рычаги действуют друг на друга, будет сосредоточена в этой точке.



Определим минимальную массу $m_{x\ \min}$, при которой возможно равновесие. Для этого в одну систему объединим груз m_x и рычаг $4m$ и запишем правило моментов относительно точки A_2:

$$4mg \cdot 6a + m_xg \cdot 10a = T_2 \cdot 8a + T_2 \cdot 10a. \tag{1}$$

Приведем подобные, поделим на $2a$, получим:

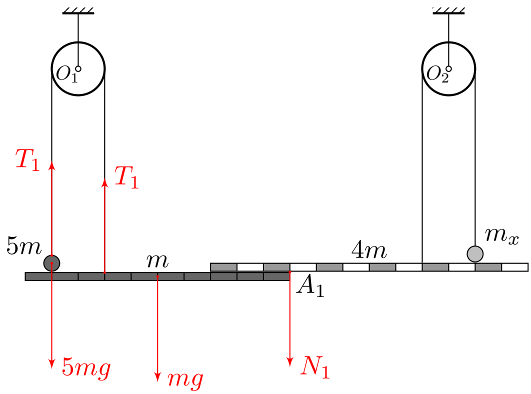
$$12mg + 5m_xg = 9T_2.$$

Так как:

$$28T_2 = 52mg + 15m_xg,$$

то:

$$m_{x\,\min} = \frac{42}{5}m = 8{,}4m.$$



Определим максимальную массу $m_{x\,\max}$, при которой возможно равновесие. Для этого в одну систему объединим груз $5m$ и рычаг m и запишем правило моментов относительно точки A_1:

$$mg \cdot 5a + 5mg \cdot 9a = T_1 \cdot 9a + T_1 \cdot 7a. \tag{2}$$

Приведем подобные, поделим на $2a$, получим:

$$25mg = 8T_2.$$

Так как:

$$28T_1 = 98mg - m_x g,$$

то:

$$m_{x\,\max} = \frac{21}{2}m = 10{,}5m.$$

Проверим, что при таких массах не нарушается равновесие в других частях системы: силы натяжения нитей и силы давления грузов на рычаг должны быть положительны.

$$T_2 = 1{,}5mg + \frac{15}{28}m_x g$$

Откуда:

$$T_{2\,\max} = 1{,}5mg + 15/28 \cdot 10{,}5mg = 7{,}125mg < m_{x\,\min}g \;\Rightarrow\; F_2 > 0$$

$$T_{2\,\min} = 1{,}5mg + \frac{15}{28} \cdot 8{,}4mg > 0$$

$$T_1 = 3{,}5mg - \frac{1}{28}m_x g < 5mg \;\Rightarrow\; F_1 > 0$$

$$T_{1\,\min} = 3{,}5mg - \frac{1}{28} \cdot 10{,}5mg = 3{,}125mg > 0$$

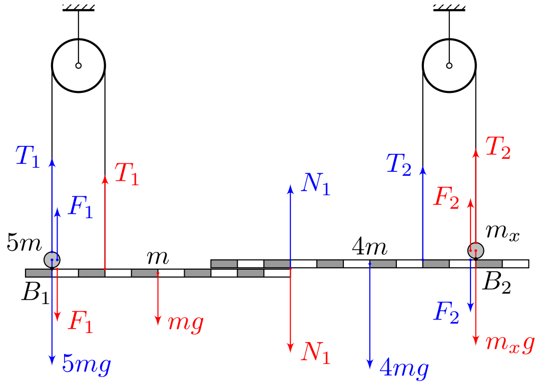
Равновесие возможно при $8{,}4m \leqslant m_x \leqslant 10{,}5m$.

Второй способ. Рассмотрим каждое тело

Сила, с которой два рычага действуют друг на друга, каким-то образом распределена по площади их контакта. При наибольшем и наименьшем значениях m_x эта сила сосредоточена в крайней правой точке области контакта и крайней левой точке соответственно. Обозначим $m_{x\,\max}$ — наибольшее значение массы груза, $m_{x\,\min}$ — наименьшее значение массы груза, при котором равновесие в системе возможно.

Пусть система находится в состоянии равновесия, при наибольшем значении m_x сила взаимодействия рычагов будет сосредоточена в крайней правой точке левого (нижнего рычага), при этом правый рычаг будет начинать поворачиваться по часовой стрелке относительно этой точки.

Запишем условие покоя каждого тела, силы, действующие на них, представлены на рисунке.



Для груза массой $5m$:

$$T_1 + F_1 = 5mg. \tag{3}$$

Для рычага массой m условие покоя:

$$T_1 = mg + N_1 + F_1. \tag{4}$$

и правило моментов относительно точки B_1:

$$T_1 \cdot 2a = mg \cdot 4a + N_1 \cdot 9a. \tag{5}$$

Здесь N_1 — сила взаимодействия рычагов, T_1 — сила натяжения левой нити, F_1 — сила взаимодействия рычага массой m и шарика массой $5m$.

Из записанных выражений определим силу взаимодействия рычагов:

$$N_1 = \frac{mg}{4}.$$

Условие покоя груза массой $m_{x\,\max}$:

$$T_2 + F_2 = m_{x\,\max} g. \tag{6}$$

Для рычага массой $4m$ условие покоя:

$$T_2 + N_1 = 4mg + F_2. \tag{7}$$

и правило моментов относительно точки B_2:

$$T_2 \cdot 2a + N_1 \cdot 7a = 4mg \cdot 4a. \tag{8}$$

Здесь T_2 — сила натяжения левой нити, F_2 — сила взаимодействия рычага массой $4m$ и шарика массой m_x.

Из записанных уравнений определяем, что:

$$6N_1 = 12mg - m_{x\,\max}g.$$

Так как:

$$N_1 = \frac{mg}{4},$$

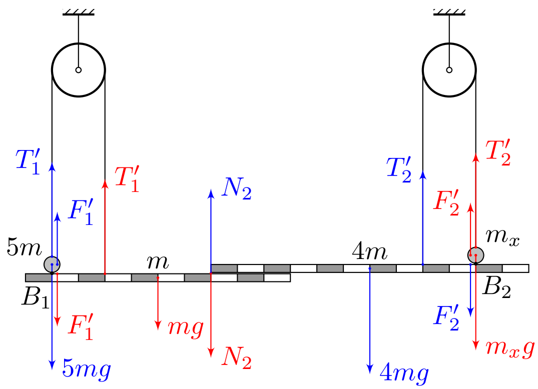
то:

$$6 \cdot \frac{mg}{4} = 12mg - m_{x\,\max}g.$$

Из последнего уравнения определяем:

$$m_{x\,\max} = \frac{21}{2}m = 10{,}5m.$$

Определим минимальную массу $m_{x\,\min}$, при которой возможно равновесие в системе. Точка приложения силы взаимодействия рычагов сейчас находится в крайней левой точке области контакта (левый край верхнего рычага).



Для груза массой $5m$:

$$T_1' + F_1' = 5mg. \tag{9}$$

Для рычага массой m условие покоя:

$$T_1' = mg + N_2 + F_1'. \tag{10}$$

и правило моментов относительно точки B_1:

$$T_1' \cdot 2a = mg \cdot 4a + N_2 \cdot 6a. \tag{11}$$

Здесь N_2 — сила взаимодействия рычагов в этом случае. Силы натяжения нитей и взаимодействия грузов с рычагами изменились и обозначены T_1' и F_1'. Найдем силу взаимодействия рычагов:

$$N_2' = \frac{2mg}{5}.$$

Запишем условие покоя груза массой $m_{x\,\min}$:

$$T_2' + F_2' = m_{x\,\min} g. \tag{12}$$

Для рычага массой $4m$ условие покоя:

$$T_2' + N_2 = 4mg + F_2'. \tag{13}$$

и правило моментов относительно точки B_2:

$$T_2' \cdot 2a + N_2' \cdot 10a = 4mg \cdot 4a. \tag{14}$$

Здесь T_2' — сила натяжения правой нити, F_2' — сила взаимодействия рычага массой $4m$ и шарика массой $m_{x\,\min}$.

Из трех последних уравнений найдем, что:

$$9N_2' = 12mg - m_{x\,\min} g.$$

Нами ранее было найдено, что:

$$N_2' = \frac{2mg}{5}.$$

Таким образом, для определения $m_{x\,\min}$ получаем уравнение:

$$\frac{9 \cdot 2 \cdot mg}{5} = 12mg - m_{x\ \min} g.$$

Определим $m_{x\,\min}$:

$$m_{x\,\min} = \frac{42}{5} m = 8{,}4m.$$

Проверим, что при таких массах не нарушается равновесие в других частях системы: силы натяжения нитей и силы давления грузов на рычаг должны быть положительны.

Непосредственным вычислением получаем:

$$T_1 = 3{,}125mg \text{ (При подстановке } N_1 \text{ в уравнение 5)}$$

$$T_2 = 7{,}125mg \text{ (При подстановке } N_1 \text{ в уравнение 8)}$$

$$T_1' = 3{,}2mg \text{ (При подстановке } N_2' \text{ в уравнение 11)}$$
$$T_2' = 6mg \text{ (При подстановке } N_2' \text{ в уравнение 14)}$$

Как итог:

$$0 < T_1, \quad T_1' < 5mg$$
$$0 < T_2, \quad T_2' < m_x g$$

Поскольку зависимость каждой из величин от m_x линейна, то данные неравенства выполняются на всем диапазоне интересных нам масс.

Равновесие возможно при $8{,}4m \leqslant m_x \leqslant 10{,}5m$.

Задача №8-Т3. Две трубки

Обозначим $T_{\text{м}}$ и $T_{\text{б}}$ температуры стенок малой и большой трубки, $T_{\text{з}}$ - температуру воздуха в зазоре между трубками. Очевидно, что $T_{\text{м}} = T$, в противном случае температура воздуха внутри малой трубки будет меняться.

$$T_{\text{м}} = T$$

Для того, чтобы температура малой трубки оставалась неизменной, тепло, выделяющееся в ее стенках при протекании тока, должно полностью отводиться в зазор между стенками. Мощность тепловыделения в малой трубке $P_{\text{м}}$ определяется выражением:

$$P_{\text{м}} = \frac{U^2}{R_{\text{м}}} = \frac{U^2 \cdot 2\pi r d}{\rho l},$$

где ρ - удельное сопротивление материала трубки, l - длина трубок, r - радиус малой трубки, d - толщина стенок трубок. Условие равенства мощностей тока и отвода тепла в зазор выглядит так:

$$P_{\text{м}} = \frac{U^2 \cdot 2\pi r d}{\rho l} = k(T - T_{\text{з}}) \cdot 2\pi r l;$$

$$T - T_{\text{з}} = \frac{U^2 \cdot d}{\rho l^2 k}, \tag{15}$$

где k - коэффициент теплообмена между трубкой и воздухом.

Мощность электрического тока для большой трубки радиуса $2r$:

$$P_{\text{б}} = \frac{U^2 \cdot 4\pi r d}{\rho l}.$$

Наружу от стенок большой трубки должно отводиться все тепло, выделяющееся в системе, поэтому:

$$P_{\text{м}} + P_{\text{б}} = \frac{U^2 \cdot 2\pi r d}{\rho l} + \frac{U^2 \cdot 4\pi r d}{\rho l} = k(T_{\text{б}} - T_0) \cdot 4\pi r l;$$

$$T_б - T_0 = \frac{3U^2 \cdot d}{2\rho l^2 k}. \tag{16}$$

Остается учесть, что воздух в зазоре между трубками в равновесном состоянии получает от малой и отдает большой в единицу времени одно и то же количество теплоты. Поэтому:

$$P_б = k(T - T_з) \cdot 2\pi r l = k(T_з - T_б) \cdot 4\pi r l,$$

и

$$T_з - T_б = \frac{3U^2 \cdot d}{2\rho l^2 k}. \tag{17}$$

Решая совместно (15), (16) и (17) получаем:

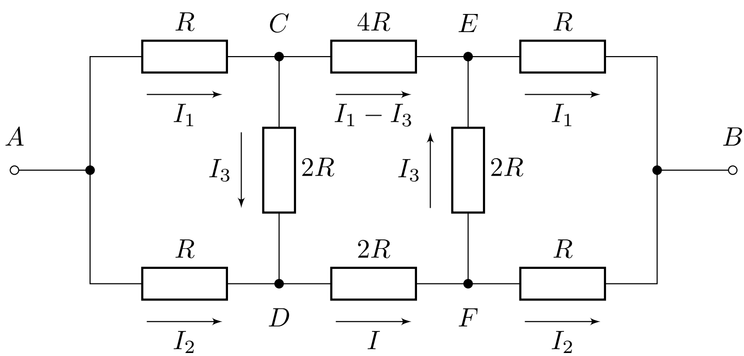
$$T_з = \frac{2T + T_0}{3}$$

$$T_б = \frac{T + T_0}{2}$$

Задача №8-Т4. Двойной мост

Первый способ. Расстановка токов

Расставим токи, текущие по резисторам (см.рис.), при этом учтем, что схема симметрична относительно точек A и B (при изменении полярности подключения источника токи в резисторах R остаются прежними, но меняется направление).



Для узла D имеем:

$$I = I_2 + I_3. \tag{18}$$

С учетом этого сила тока через резистор $4R$ равна:

$$I_1 - I_3 = I_1 - I + I_2. \tag{19}$$

Найдем напряжение между точками A и B, используя верхнюю ветвь схемы (резисторы R – $4R$ – R):

$$U_{AB} = I_1 R + (I_1 - I_3)\,4R + I_1 R = 6I_1 R - 4IR + 4I_2 R.$$

Для нижней ветви имеем (резисторы R – $2R$ – R):

$$U_{AB} = 2I_2 R + 2IR.$$

Приравняв напряжения U_{AB}, для силы тока I_2 получим:

$$I_2 = 3I - 3I_1. \tag{20}$$

Для контура $CDFEC$:

$$4R\,(I_1 - I_3) = 2RI_3 + 2RI + 2RI_3. \tag{21}$$

Подставим выражение (19), преобразуем и получим выражение для силы тока I_1:

$$I_1 = \frac{5}{2}I - 2I_2.$$

Подставим (20) и определим силу тока I_1:

$$I_1 = \frac{7}{10}I.$$

Далее найдем силы токов I_2 и I_3:

$$I_2 = \frac{9}{10}I;$$

$$I_3 = \frac{1}{10}I.$$

Сила тока в подводящих проводах равна $I_1 + I_2$, поэтому напряжение U_{AB}:

$$U_{AB} = (I_1 + I_2)\,R_{AB} = \frac{8}{5}IR_{AB}.$$

Кроме того,

$$U_{AB} = 2I_2 R + 2IR = \frac{19}{5}RI.$$

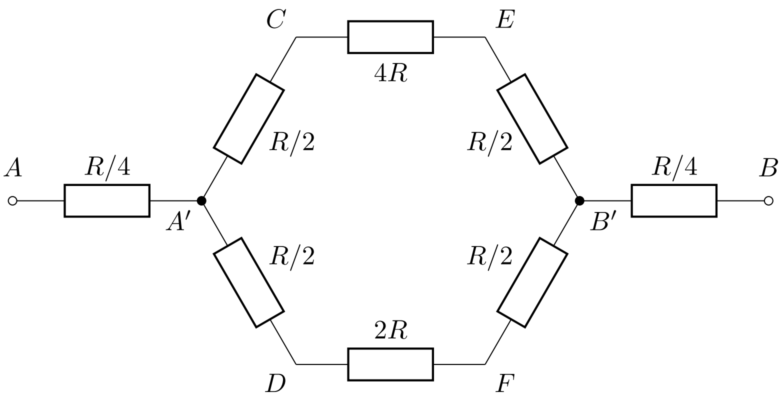
Из записанных выражений определяем:

$$R_{AB} = \frac{19}{8}R.$$

Второй способ. Преобразование «звезда-треугольник»

Треугольник сопротивлений, включенный между токами A, C и D, преобразуем в звезду. Аналогичным образом преобразуем треугольник, включенный между точками E, F и B. Получим схему, сопротивление которой легко считается:

$$R_{AB} = \frac{R}{4} + \frac{\left(\frac{R}{2} + 4R + \frac{R}{2}\right) \cdot \left(\frac{R}{2} + 2R + \frac{R}{2}\right)}{\frac{R}{2} + 4R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + 2R + \frac{R}{2}} + \frac{R}{4} = \frac{19}{8}R.$$



Силу тока через резистор $\frac{R}{4}$ обозначим i_1. Сила тока, текущего через верхнюю ветвь равна:

$$\frac{3}{8}i_1.$$

Сила тока, текущего через нижнюю ветвь равна:

$$\frac{5}{8}i_1.$$

Определим разность потенциалов между точками C и D:

$$\varphi_C - \varphi_D = \frac{2}{16}i_1 R.$$

Так как потенциал точки C выше потенциала точки D, то ток на этом участке направлен от C к D. Разность потенциалов между точками E и F равна:

$$\varphi_E - \varphi_F = -\frac{2}{16}i_1 R.$$

Потенциал точки F выше потенциала точки E, то ток на этом участке направлен от F к E.

Зная разность потенциалов между точками, определим силу тока на этих участках:

$$I_{CD} = \frac{\varphi_C - \varphi_D}{2R} = \frac{i_1}{16}.$$

По условию задачи сила тока на участке DF равна I, поэтому:

$$\frac{5}{8} i_1 = I.$$

Тогда сила тока:

$$I_{CD} = \frac{i_1}{16} = \frac{I}{10}.$$

$$R_{AB} = \frac{19}{8} R$$

Сила тока в ветви CD равна $\frac{I}{10}$, и ток направлен от C к D. Сила тока в ветви EF равна $\frac{I}{10}$, и ток направлен от F к E.